Towards an end-stopped theory of low level vision

Nos 60 anos de Luiz Velho

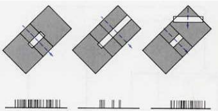
Cicero Mota
mota@ufam.edu.br

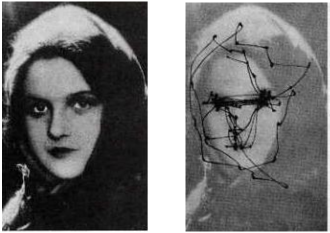
Dep. Matemática, UFAM

1.º de fevereiro de 2017

Células no Córtex Visual Primário

Simples, complexas e hypercomplexas (**end-stopped**)





(Nobel Prize em Medicina de 1981: D. H. Hubel e T. N. Wiesel "for their discoveries concerning information processing in the visual system".)

Modelagem Ens-stopped

Objetivo: encontrar um operador B entre imagens com a propriedade

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}),\ x\in\Omega \implies Bf|_\Omega = 0}$$

Resposta nula para imagens 1D.

Modelagem linear não é apropriada:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} F_{\boldsymbol{k}}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \implies Bf \equiv 0.$$

Modelos propostos (Zetsche e Barth)

$\mathbf{A}$ indica o operador de Gauss-Weingarten de $S = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))\}$
$\boldsymbol{H}$ o hessiano de f.

$$f \in 1D \implies k = \det \mathbf{A} \equiv 0.$$

- $k = \frac{\det \boldsymbol{H}}{(1+(\nabla f)^2)^{3/2}}$ não é homogêneo
- $d = \det \boldsymbol{H}$ (injetividade relacionada a Monge-Ampere)
- $d_{\text{min}} = \min\{d_1,\ d_2\} =$ menor autovalor de $\boldsymbol{H}$
- Clipped eigenvalues

$$c = \begin{cases} d_{\text{min}} & \text{se } d > 0 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

Todos gozam da propriedade

$$\boxed{f \mapsto F((\nabla f)^2, \Delta f, \det \boldsymbol{H}).}$$

Outros modelos

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}) \implies \boldsymbol{HJ}\nabla f = 0}$$

($\boldsymbol{H}$ tem um 0-autovetor!)

Modelos imediatos:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}f &= \det \boldsymbol{H} \\ \mathrm{S}f &= \langle \boldsymbol{HJ}\nabla f, \nabla f\rangle \\ \mathrm{T}f &= \langle \boldsymbol{HJ}\nabla f, \boldsymbol{J}\nabla f\rangle. \end{aligned}$$

São todos?

Em coordenadas

$$H = rt - s^2$$
$$S = pq(t-r) + s(p^2 - q^2)$$
$$T = q^2 r - 2pqs + p^2 t$$

Variáveis p, q, r, s, t com valores

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \ldots.$$

Existe um polinômio I :

$$\boxed{Bf(x,y) = I(x, y, f, p, q, r, s, t),} \quad B \in \{H,\ S,\ T\}.$$

Invariantes diferenciais de segunda ordem de $SO(2)$

A função $I : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$ é especial.

$$\boxed{I(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}) = I(x, y, u, p, q, r, s, t).}$$

Sempre que $\boldsymbol{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma rotação,

$$\begin{aligned} (\tilde{x}, \tilde{y})^T &= \boldsymbol{R}\,(x, y)^T, \\ \tilde{u} &= u, \\ (\tilde{p}, \tilde{q})^T &= \boldsymbol{R}\,(p, q)^T, \\ \begin{pmatrix} \tilde{r} & \tilde{s} \\ \tilde{s} & \tilde{t} \end{pmatrix} &= \boldsymbol{R} \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \boldsymbol{R}^T. \end{aligned}$$

Valores de I não dependem do sistema de coordenadas no plano cartesiano.

Classificação dos modelos de segunda ordem admissíveis

Theorem

Seja $f \mapsto Bf$ um operador definido por

$$Bf(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}, f, p, q, r, s, t).$$

1. *Se $I : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{C}$ é um invariante diferencial de $\mathrm{SO}(2)$ então*

$$Bf(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^2, f, \mathbf{x}\nabla f, (\nabla f)^2, \Delta f, H, S, T);$$

2. *Se, além disso, B é end-stopped e F é de classe C^1, existem invariantes A_j de $\mathrm{SO}(2)$ tais que*

$$\boxed{Bf = A_1\, S + A_2\, T + A_3 H;}$$

3. *Se I é um polinômio então F, A_1, A_2, A_3 são polinômios.*

Álgebra Geométrica do Plano

A álgebra é gerada por $\{1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \mathrm{j}\}$ com relações

$$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_2^2 = 1$$
$$\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_1 = \mathrm{j}$$

Os vetores do plano correspondem aos elementos $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$
Os números complexos correspondem aos elementos $x + y\,\mathrm{j}$

Para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vetores:
Produto escalar : $2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{xy} + \mathbf{yx}$
Produto exterior: $2\,\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{xy} - \mathbf{yx}$
Produto geométrico: $\mathbf{xy} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$

Em coordenadas:

$$\mathbf{x}\nabla f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + (x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x})\,\mathrm{j}$$

$$\boxed{Bf = A_1\,S + A_2\,T + A_3 H;}$$

Que operador escolher?

- Simplicidade: H, S, T?
- Homogenia: $B(\lambda f) = \lambda^k Bf$?
- Exatidão: $Bf|_\Omega = 0 \implies f|_\Omega$ é $1D$?

- H, S, T não são exatos;
- $\Gamma := S + T\,\mathrm{j}$ é exato e homogêneo.

Quanto de f é codificado em $\Gamma = S + T\,\mathrm{j}$?

Seja $f(t) = f(\gamma(t))$ e $\eta(t) := \nabla f(\gamma(t))$ então

$$\begin{cases} f' = \langle \nabla f, \gamma' \rangle = \langle \eta, \gamma' \rangle \\ \eta' = H\gamma'. \end{cases}$$

$$\text{e} \qquad \eta\eta' = \langle H\eta, \dot\gamma\rangle + \langle H\boldsymbol{J}\eta, \dot\gamma\rangle\,\mathrm{j}.$$

da ortogonalidade de η e $\boldsymbol{J}\eta$

$$H\eta = \frac{U}{\eta^2}\eta + \frac{S}{\eta^2}\boldsymbol{J}\eta, \qquad H\boldsymbol{J}\eta = \frac{S}{\eta^2}\eta + \frac{T}{\eta^2}\boldsymbol{J}\eta.$$

Daí

$$\boxed{\eta^3\eta' = \langle \eta, \gamma'\rangle(U + S\,\mathrm{j}) + \langle \boldsymbol{J}\eta, \gamma'\rangle(S + T\,\mathrm{j}).}$$

$U = \langle \boldsymbol{H}\nabla f, \nabla f\rangle$

As curvas γ são os zero-crossings do laplaciano da imagem

"Uma imagem fica determinada pelo conjunto de zero-crossings de seu laplaciano mais suas inclinações ao longo desse conjunto." (D. Marr)

Simbolicamente:

$Z(f) =$ Zeros-crossings de $f = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = 0 \text{ e } \nabla f(\mathbf{x}) \neq 0\}$:

$$\begin{cases} Z(\Delta f) = Z(\Delta g) =: Z \\ \nabla f|_Z = \nabla g|_Z \,(\text{orig. incl. } \Delta f) \end{cases} \implies f = g.$$

Proposição

Seja $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ uma imagem e $\gamma : I \to \mathbb{E}$ um zero-crossing de Δu com $\gamma(0) = \gamma_0$. Se f não tem pontos críticos sobre o traço de γ então $t \mapsto \eta(t) := \nabla f(\gamma(t))$ é a única solução de

$$\begin{cases} \eta^3 \eta' = \Gamma\, \gamma' \eta\, \mathrm{j} \\ \eta_0 = \nabla f(\gamma_0). \end{cases}$$

As curvas γ são as arestas da imagem

$E(f) =$ arestas Haralick de f :

$$\begin{cases} E(f) = E(g) =: E \\ \nabla f|_E = \nabla g|_E \end{cases} \implies f = g, \text{ perceptualmente (S. Mallat).}$$

Proposição

Seja $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ uma imagem, $\gamma : I \to \mathrm{E}$ uma aresta de f com $\gamma(0) = \gamma_0$. Então $t \mapsto \eta(t) := \nabla u(\gamma(t))$ é a única solução de

$$\begin{cases} \eta^3 \eta' = S\, \gamma' \eta\, \mathrm{j} + T \eta \wedge \gamma' \\ \eta_0 = \nabla u(\gamma_0). \end{cases}$$

A Equação diferencial $\Gamma_u = \sigma + \tau\, j$ em coordenadas

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}^2 - \frac{\partial u}{\partial y}^2\right) = \sigma \\
&\frac{\partial u}{\partial y}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \tau
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Sistema superdeterminado de PDE $\Longrightarrow$ existência de equações de compatibilidade

Proposição

Há exatemente cinco equações de compatibilidade, $F = G = L = M = N = 0$, e elas dependem somente de $x, y, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y$.

Theorem

Seja $\sigma + \tau\,\mathrm{j}$ *uma função suave. Suponha que em* $(\boldsymbol{x}_0, \eta_0)$,

$$F = G = 0, \quad pF_p + qF_q \neq 0, \quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)} \neq 0.$$

E seja $\boldsymbol{x} \mapsto \eta(\boldsymbol{x})$ *definida implicitamente por* $F(\boldsymbol{x},\eta) = G(\boldsymbol{x},\eta) = 0$, $\eta_0 = \eta(\boldsymbol{x}_0)$. *Suponha que as identidades* $L = M = N = 0$ *valem ao longo do gráfico de* η. *Então*

$$\begin{cases} \Gamma_u = \sigma + \tau\,\mathrm{j} \\ u(\boldsymbol{x}_0) = u_0 \\ \nabla u(\boldsymbol{x}_0) = \eta_0 \end{cases} \tag{2}$$

possui uma única solução em alguma vizinhança de $\boldsymbol{x}_0$; *a solução é suave e satisfaz*

$$\begin{cases} \nabla u = \eta \\ u(\boldsymbol{x}_0) = u_0. \end{cases} \tag{3}$$

Unicidade da representação por Γ

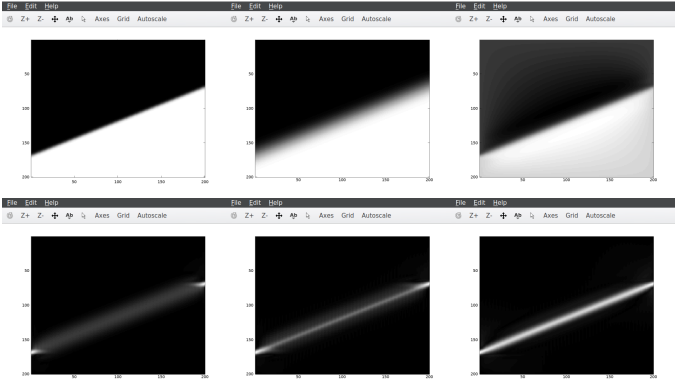
Theorem

Sejam f e g imagens definidas em um conjunto aberto e conexo Ω, com $\Gamma_f = \Gamma_g$ e F, G como anteriormente. Se $\partial(F,G)/\partial(p,q)$ não se anula no gráfico $\mathcal{G} = \{(\boldsymbol{x}, \nabla u(\boldsymbol{x}));\ \boldsymbol{x} \in \Omega\}$, então $u(\boldsymbol{x}_0) = v(\boldsymbol{x}_0)$ e $\nabla u(\boldsymbol{x}_0) = \nabla v(\boldsymbol{x}_0)$ para algum $\boldsymbol{x}_0$ em Ω implica $f = g$.

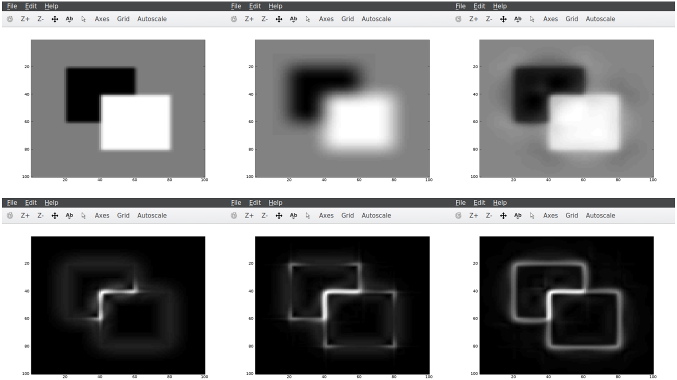
Example

As únicas funcões com $T = -6x^4 y$ and $S = 4x^3y^2 - 2x^5$ são $u(x,y) = x^2y + k$, em que k é uma constante.

Simulação


File Edit Help
Z+ Z- Ab Axes Grid Autoscale
50
100
150
200
50 100 150 200
File Edit Help
Z+ Z- Ab Axes Grid Autoscale
50
100
150
200
50 100 150 200
File Edit Help
Z+ Z- Ab Axes Grid Autoscale
50
100
150
200
50 100 150 200
File Edit Help
Z+ Z- Ab Axes Grid Autoscale
50
100
150
200
50 100 150 200
File Edit Help
Z+ Z- Ab Axes Grid Autoscale
50
100
150
200
50 100 150 200
File Edit Help
Z+ Z- Ab Axes Grid Autoscale
50
100
150
200
50 100 150 200

Simulação


File Edit Help
Z+ Z- Ab Axes Grid Autoscale
20
40
60
80
100
20
40
60
80
100

Equações da simulação

Minimize um funcional de Lagrange para $\eta = (p, q)$:

$$\mathcal{L}(p,q) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\beta_j \int (R^j)^2 \, \mathrm{d}\Omega$$

$$R^1 = \langle Q\xi, \xi\rangle - \tau \quad R^2 = \langle Q\xi, \eta\rangle - \sigma \quad R^3 = \operatorname{rot}\eta \quad Q = \begin{pmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a^p_{11}p_{xx} + a^p_{22}p_{yy} &= a^p_{12}p_{xy} + \gamma q_{xy} + \beta\mathcal{P}(\eta, Q) \\ a^q_{11}q_{xx} + a^q_{22}q_{yy} &= a^q_{12}q_{xy} + \gamma p_{xy} - \beta\mathcal{Q}(\eta, Q) \end{aligned}$$

Ganho: Sistema quasilinear fortemente elíptico.
Perda: Não tem solução única.

Obrigado ao Luiz Velho!

Obrigado a todos!