

27^o Colóquio Brasileiro de Matemática
Proposta de Curso

“Compressive Sensing”

Organizadores:

Luiz Velho (IMPA)

Eduardo A. B. da Silva (UFRJ)

Adriana Schulz (UFRJ)

1. Informações Gerais

1.1 Título

“Compressive Sensing”

1.2 Autores

Luiz Velho

IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320, Rio de Janeiro, RJ
Tel: (021) 2529-5000
Fax: (021) 2512-4115

Eduardo Antônio Barros da Silva

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
21941-972, Rio de Janeiro, RJ
Tel: (021) 2562-8156
Fax: (021) 21 2562-8205

Adriana Schulz

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
21941-972, Rio de Janeiro, RJ

1.3 Nível do Curso

Introdutório

1.4 Pré-requisitos

- Álgebra Linear
- Cálculo
- Estruturas de Dados
- Noções de Computação
- Noções de Processamento de Sinais

2. Descrição do Curso

2.1 Introdução

Aquisição e reconstrução de sinais estão no centro de processamento de sinais, e teoremas de amostragem promovem a ponte entre os domínios contínuos e discretos. O principal teorema que estabelece um limite para a taxa de amostragem de um sinal garantindo sua reconstrução é o teorema de Shannon-Nyquist para sinais de banda limitada.

Observa-se, entretanto, que o limite de Nyquist considera o pior caso e não leva em conta a *compressibilidade* da informação. Câmeras digitais comuns, por exemplo, capturam um grande número de amostras (i.e., da ordem de mega-pixels), mas apenas armazenam uma versão comprimida da imagem no formato JPEG. Portanto, este procedimento, assim como a maioria dos métodos usados para compressão de dados, desperdiça a maior porcentagem dos dados adquiridos.

Neste contexto, surge um novo paradigma que contraria os cânones usuais em aquisição de dados. A teoria de “Compressive Sensing” (CS) assegura que é possível recuperar sinais esparsos a partir de um número bem menor de amostras que as necessárias nos métodos clássicos, e usa para isto protocolos de sensoriamento *não-adaptativos*.

Além de ser um tema recente que tem causado grande impacto na comunidade científica por representar uma quebra de paradigma na área de amostragem e aquisição de dados, a teoria se torna interessante na medida em que envolve ferramentas matemáticas importantes e noções de aquisição, compressão, redução de dimensionalidade e otimização.

Como a teoria em questão é muito nova, ela ainda não tem uma denominação definitiva estabelecida. De fato, os pesquisadores da área usam os termos “Compressive Sensing” e “Compressible Sampling” de maneira intercambiável. Por esse motivo, decidimos não traduzir o título do curso e, assim adotar a expressão “Compressive Sensing” em inglês, a qual nos parece mais apropriada. Nessa proposta, vamos utilizar também a abreviação “CS” para designar o tema.

2.2 Objetivos

O curso é direcionado para alunos e pesquisadores de Matemática Aplicada que têm interesse em processamento de imagens, representação e reconstrução de sinais, otimização e compressão de dados.

O objetivo é fazer uma exposição dos fundamentos de CS que poderá ser usada como guia bibliográfico para aqueles que se iniciam nesta área. Assim, a importância deste trabalho está na introdução do estudo de CS para a comunidade acadêmica e no estímulo a novos projetos de pesquisa relacionados.

2.3 Conteúdo

Após uma breve motivação à técnica de CS, o curso inicia expondo os métodos clássicos para compressão de imagens que utilizam o paradigma de amostragem seguido de compressão. São estudados métodos que utilizam transformadas (como a DCT e DWT) na tentativa de explorar a redundância de sinais naturais para mapear os dados em coeficientes menos correlacionados e, portanto, esparsos.

Crescendo em níveis de abstração, este modelo de compressão é relacionado a métodos de representação e reconstrução de sinais, que são então estudados com um enfoque especial à teoria de aproximação.

Com estas primeiras análises, fica estabelecido o embasamento para a investigação da sub-amostragem. Entretanto, antes de expor os teoremas fundamentais de CS, é realizado um esforço para justificar intuitivamente a combinação do sensoriamento e compressão de dados em um única formulação.

A idéia envolve explorar a esparsidade de sinais naturais e substituir a amostragem pontual por medições lineares genéricas. Assim, a informação adquirida encontra-se em um domínio incoerente ao domínio no qual o sinal é esparso e a reconstrução é feita a partir de um algoritmo de otimização convexa que minimiza a norma l_1 .

A partir da definição do algoritmo de reconstrução, busca-se estabelecer as características que devem ser impostas ao modelo de aquisição de dados para garantir um bom desempenho. Assim, são definidos alguns parâmetros e expostos uma série de teoremas que avaliam CS em diferentes contextos.

O curso encerra com exemplos de aplicações em compressão de imagens, onde são utilizados como ilustrações resultados obtidos pelos autores. São também discutidos os recentes projetos que vêm sendo desenvolvidos na área.

3. Distribuição dos Capítulos

3.1 Introdução

Este capítulo discute as técnicas usuais de amostragem, como o critério de Nyquist e suas principais restrições, abrindo o caminho para a motivação de CS.

O capítulo introdutório apresenta uma visão geral da área, complementada por uma breve cronologia da pesquisa em CS e exemplos recentes de resultados e suas aplicações.

Serão também expostos os objetivos e a organização do material.

3.2 Compressão de Imagens

Este capítulo introduz a codificação por transformada e apresenta os três passos essenciais para compressão de imagens:

- Representação - para exemplificar são descritas:
 - Transformada de Karhunen-Loève (KLT)
 - Transformada do Coseno Discreta (DCT)
 - Transformada Wavelet Discreta (DWT)
- Quantização - para exemplificar são descritas:
 - Quantização Escalar
 - Quantização Vetorial
- Codificação - para exemplificar são descritos:
 - Código Huffman
 - Código Aritmético

Em seguida, são analisados dois dos principais padrões de compressão (JPEG e JPEG2000) e são estudadas classificações para as técnicas de compressão (com \times sem perdas e lineares \times não-lineares).

3.3 Representação de Sinais

Neste capítulo são descritos diferentes métodos de representação e reconstrução de sinais. Inicialmente, é feito um paralelo entre o processo de compressão e o problema de modificar a representação de sinais.

São abordados modelos de decomposição de sinais baseados em:

- Bases
- *Frames*

e, a partir destes conceitos, são analisadas a amostragem, a sub-amostragem e a super-amostragem.

Por último, são apresentados alguns aspectos da teoria de aproximação:

- Aproximação em uma base linear
- Aproximação em dicionários super-completos:
 - *Basis Pursuits*
 - *Matching Pursuits*

3.4 CS: Uma Visão Geral

Neste capítulo são estudados os principais conceitos envolvidos em CS. Entre os tópicos discutidos incluem-se:

- descrição algébrica do problema de sub-amostragem
- relação entre esparsidade e a norma l_1
- algoritmo de reconstrução baseado em otimização convexa

É exposto o problema que inicialmente motivou a elaboração desta teoria e, também, suas relações com estudos anteriores.

Encerra-se este capítulo enunciando o primeiro resultado obtido (*Fourier Sampling Theorem* [14]) e questionando possíveis extensões para o mesmo.

3.5 CS: Resultados Teóricos

Este capítulo investiga os principais teoremas e definições de CS e apresenta a intuição matemática para justificá-los. As principais definições são:

- Incoerência
- Constante de Isometria Restrita (RIP)

e, baseado nelas, são estabelecidos limites para a aplicação da teoria.

São estudados resultados em dois contextos:

- CS Básico - apresenta a teoria que estipula limites para a reconstrução de sinais em condições ideais.
- CS Robusto - expansão da abordagem anterior para possibilitar aplicações de CS em contextos onde o sinal é apenas aproximadamente esparso ou as medições são corrompidas por ruído.

Por ser um curso introdutório, não fazem parte do escopo demonstrações formais dos teoremas.

3.6 Aplicações em Compressão de Imagens

A teoria de CS é ilustrada neste capítulo a partir de resultados obtidos pelos autores. As medidas são feitas por *noiselets* e são utilizadas:

- imagens esparsas no domínio da DCT e da DWT
- imagens naturais (apenas aproximadamente esparsas), onde esparsidade é assumida no domínio da DCT e da DWT
- medições ruidosas de imagens esparsas no domínio DWT
- medições quantizadas de imagens naturais e esparsas no domínio DWT

3.7 Discussão

Neste capítulo, o desempenho de CS é analisado em diversas conjunturas e comparado com técnicas padrões de compressão de imagens.

São discutidas novas aplicações e expostos os recentes trabalhos publicados na área e referências bibliográficas.

Bibliografia

- [1] Richard Baraniuk. Compressive sensing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 24(4), July 2007.
- [2] Emmanuel Candès. Compressive sampling. *Int. Congress of Mathematics*, 3:1433–1452, 2006.
- [3] Emmanuel Candès. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Compte Rendus de l'Academie des Sciences, Series*, 346:589–590, 2008.
- [4] Emmanuel Candès and Justin Romberg. *11–Magic: Recovery of Sparse Signals via Convex Programming*. 2006.
- [5] Emmanuel Candès and Justin Romberg. Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Problems*, 23(3):969–985, 2007.
- [6] Emmanuel Candès and Terence Tao. Decoding by linear programming. *IEEE Trans. on Information Theory*, 51(12), December 2005.
- [7] Emmanuel Candès and Terence Tao. Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? *IEEE Trans. on Information Theory*, 52(12), December 2006.
- [8] Emmanuel Candès and Terence Tao. The dantzig selector: Statistical estimation when p is much larger than n . *Annals of Statistics*, 35, 2007.
- [9] Scott Shaobing Chen, David L. Donoho, and Michael A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20(1):33–61, 1998.
- [10] Eduardo da Silva and Gelson Mendonca. *Digital Image Processing*, chapter VII.4, pages 891–910. The Electrical Engineering Handbook. Wai-Kai Chen, Elsevier - Academic Press, 2005.
- [11] Eduardo A. B. da Silva. *Apostila de TV Digital*. UFRJ, 2004.
- [12] Michael B. Wakin Marco F. Duarte Dror Baron Shriram Sarvotham Kevin F. Kelly Dharmpal Takhar, Jason N. Laska and Richard G. Baraniuk. A new compressive imaging camera architecture using optical-domain compression. In *Computational Imaging IV at SPIE Electronic Imaging*, San Jose, California, January 2006.
- [13] David Donoho and Philip Stark. Uncertainty principles and signal recovery. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 49(3):906–931, 1989.
- [14] Justin Romberg Emmanuel Candès and Terence Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans. on Information Theory*, 52(2), February 2006.

- [15] Justin Romberg Emmanuel Candès and Terence Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59(8), August 2006.
- [16] Jonas Gomes and Luiz Velho. *Image Processing for Computer Graphics*. Springer Verlag, 1997.
- [17] Jonas Gomes and Luiz Velho. *From Fourier Analysis to Wavelets*. SIGGRAPH'99 Course Notes 5, SIGGRAPH-ACM publication, Los Angeles, California, USA, august 1999.
- [18] The Institute for Mathematics and its Applications (IMA). *Lectures on compressive sampling and frontiers in signal processing*, University of Minnesota, June 2007.
- [19] Anil K. Jain. *Fundamentals of digital image processing*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1989.
- [20] Stéphane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, Porto Alegre, second edition edition, 1999.
- [21] Majid Rabbani and Rajan Joshi. An overview of the jpeg 2000 still image compression standard. *Signal Processing: Image Communication*, 17:3–48, 2002.
- [22] Justin Romberg. Imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2), March 2008.