Métodos Matemáticos e Computacionais em Música

Luiz Velho, Paulo Cesar Carvalho,
Sergio Krakowski, Marcelo Cicconet

IMPA

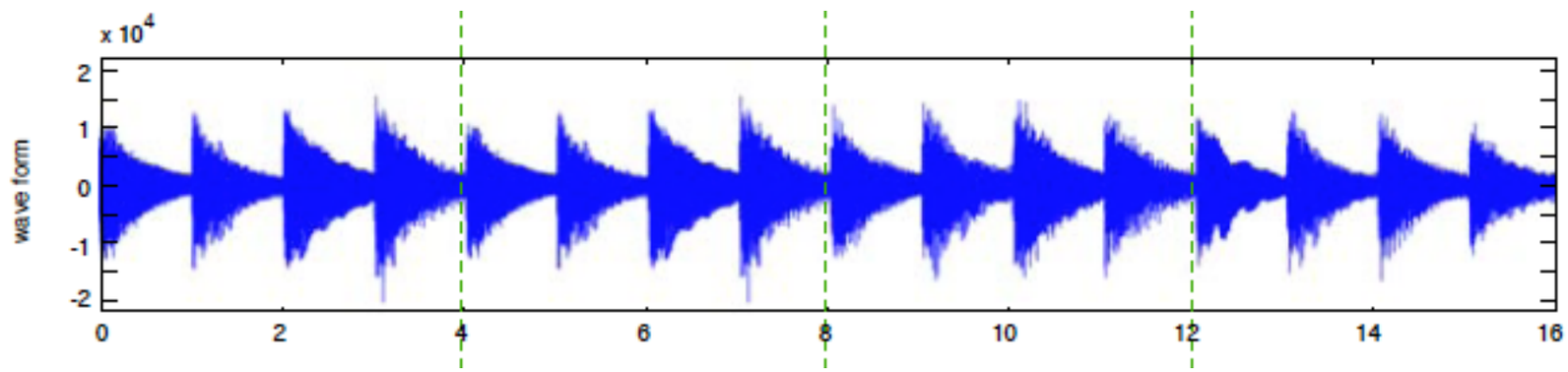
Visualização do Som

Processamento de Sinais Sonoros

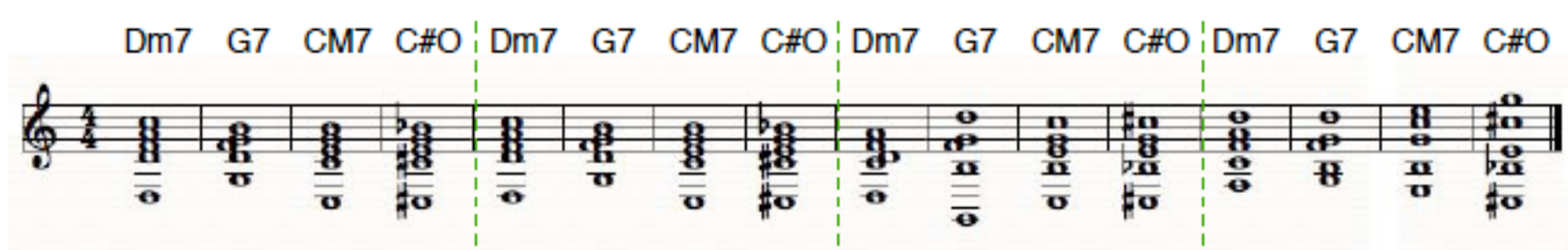
Luiz Velho

Música e Som

- Som
  - Sinal 1 D

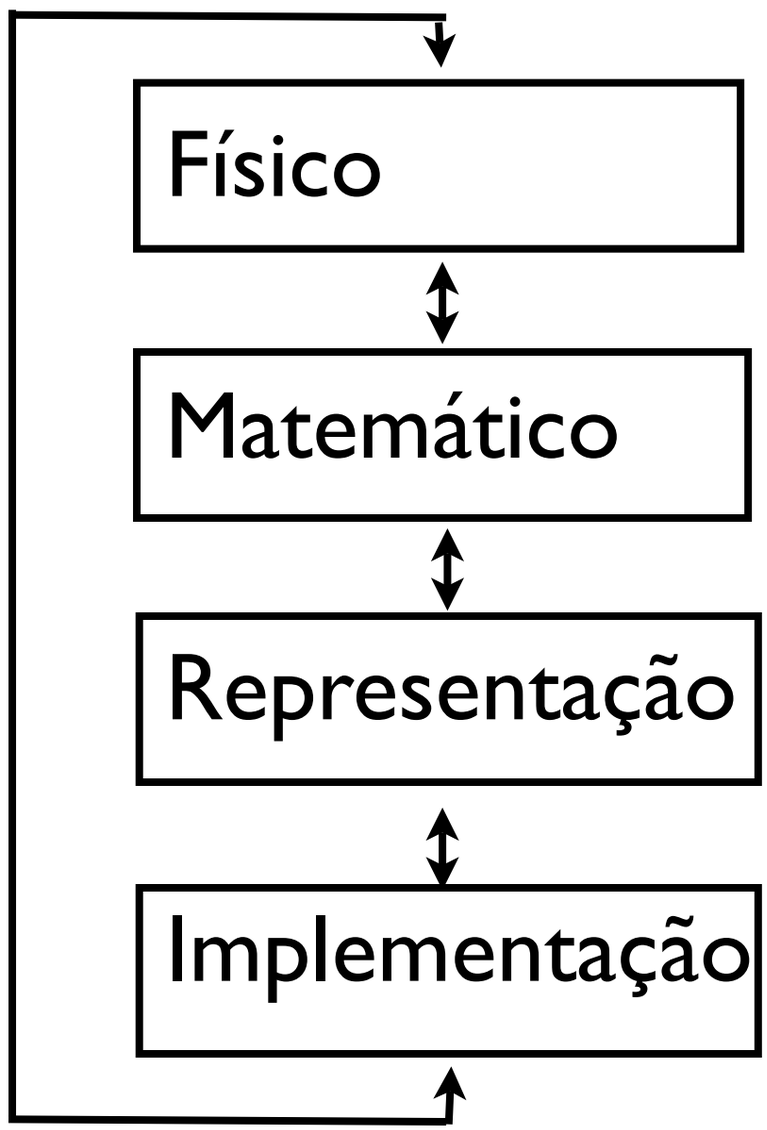


- Musica
  - Som + Estrutura



Metodologia

- Paradigma dos 4 Universos (níveis de abstração)



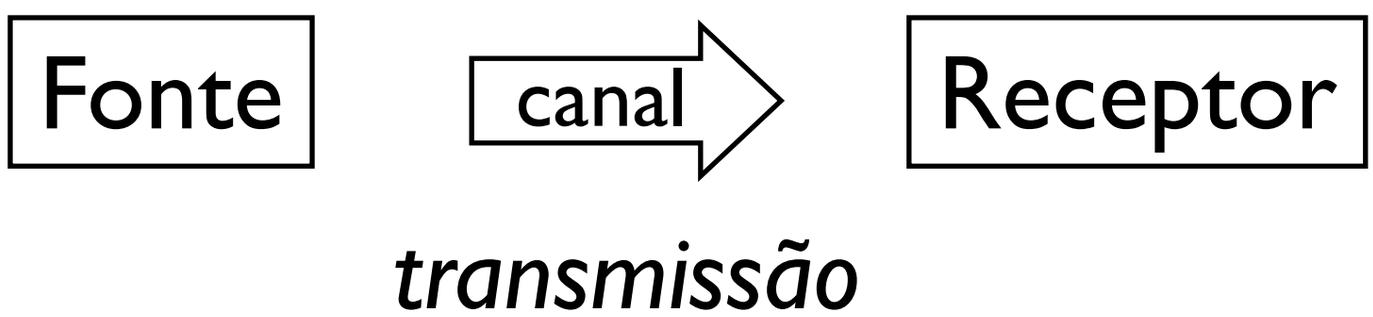
- Objeto Real
- Modelo Contínuo
- Descrição Discreta
- Formato de Dados Finito

Som no Mundo Físico

- Sistema Físico de Som

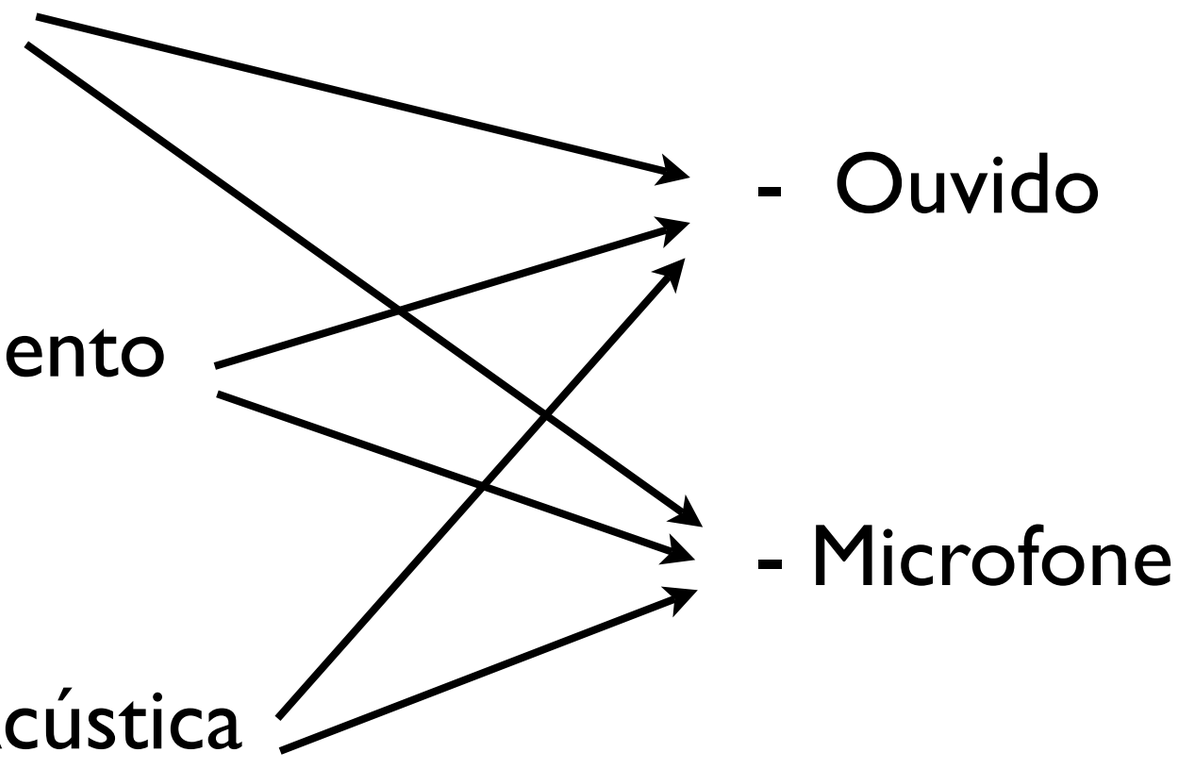
Emissor $\xrightarrow{\text{vibração do ar}}$ Sensor

- Som como Sinal



Som Musical

- Exemplos
  - Voz
  - Instrumento
  - Caixa Acústica



  - Ouvido
  - Microfone

Comunicação Musical

- Percepção
  - Frequencia (Notas)
  - Timbre (Instrumentos)
- Estrutura
  - Melodia
  - Ritmo
- Composição
  - Padrões

Níveis de Modelo

- Baixo Nível
  - Sensório
    Informações Brutas (Vibração)
- Nível Intermédiario
  - Perceptual
    Estrutura (Notas)
- Alto Nível
  - Cognitivo
    Composição (Música)

Modelos Matemáticos I

- Modelo Temporal
  (*grandeza fisica ao longo do tempo*)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

- Modelo Espectral
  (*densidade de frequencias*)

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

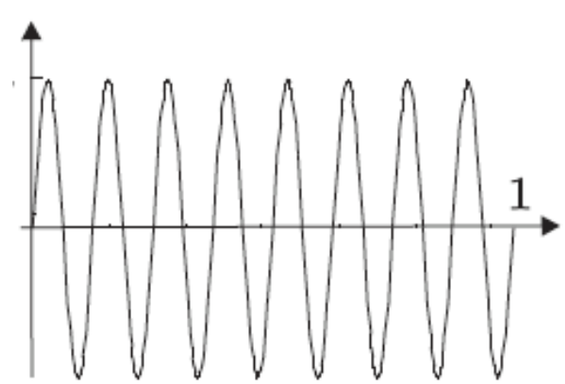
Modelo Espectral

- Transformada de Fourier

$$f \mapsto \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t s} dt$$

- Núcleo da Transformada

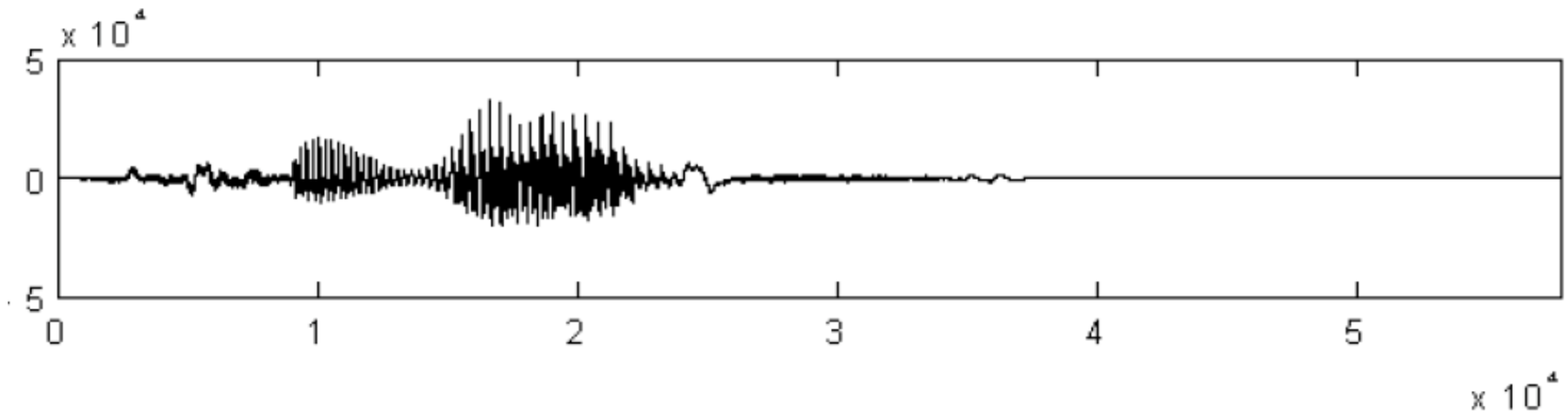
$$e^{2\pi i \theta} = \cos 2\pi\theta + i \sin 2\pi\theta$$



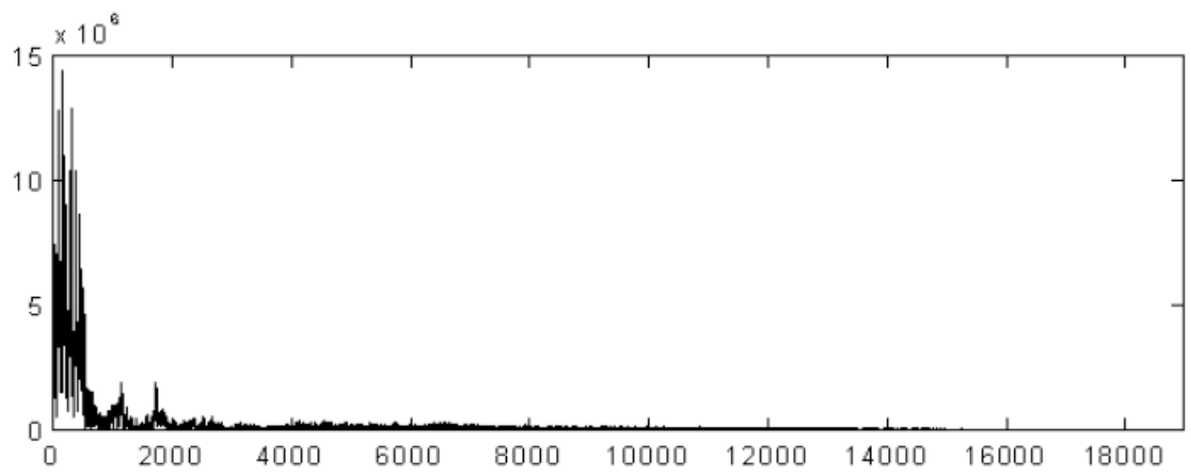
✳ Ressonância do Sinal <u>todo</u> com a Frequencia s

Sinal e Modelos

- Sinal no Dominio do Tempo



- Sinal no Dominio da Frequência



Conversão entre Modelos

- Transformada de Fourier
  - Inversível
  - preserva energia (teorema de Parseval)

  - Direta

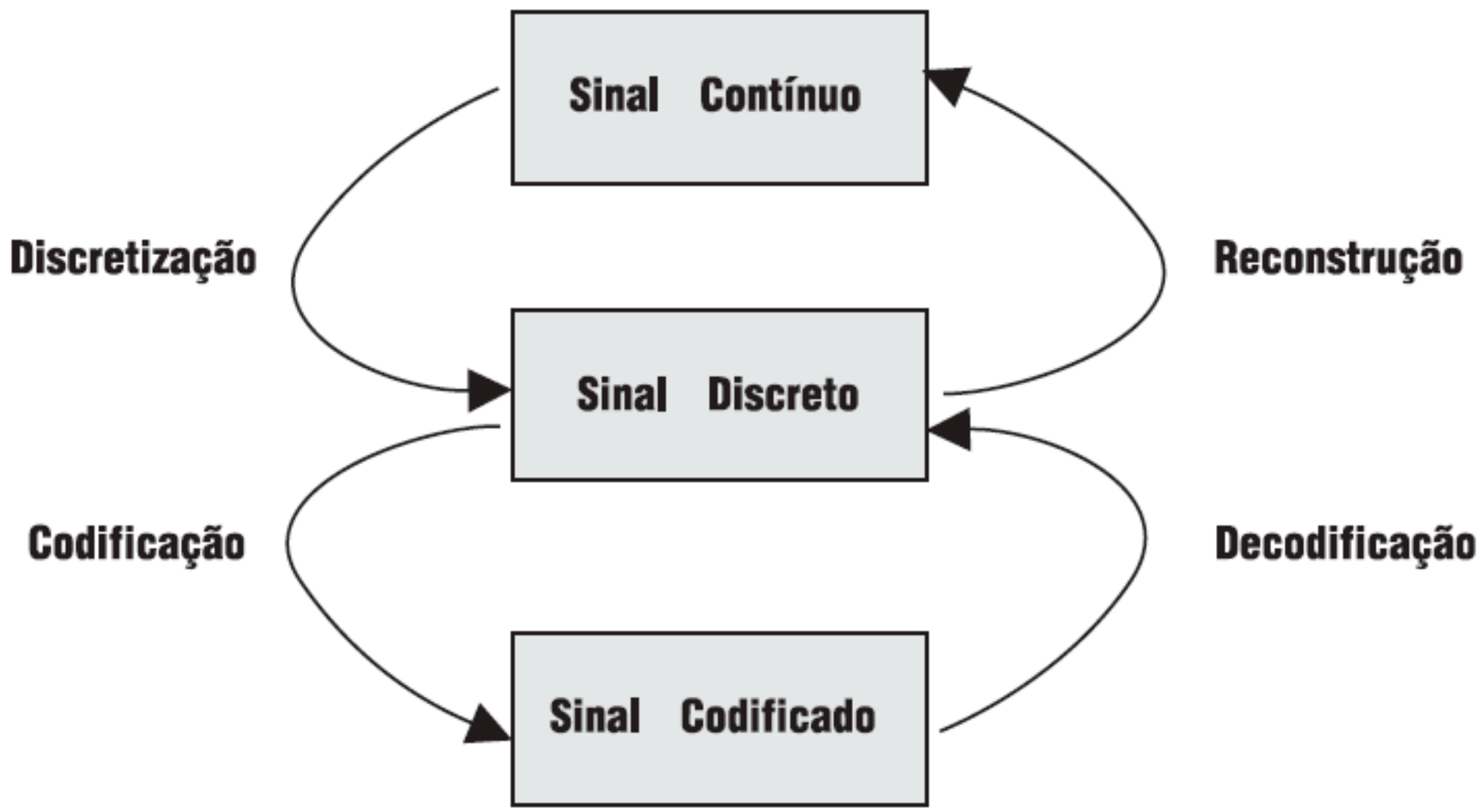
$$f \mapsto \hat{f} = F(f)$$

  - Inversa

$$f(t) = F^{-1}(\hat{f}(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s) e^{2\pi i s t} ds$$

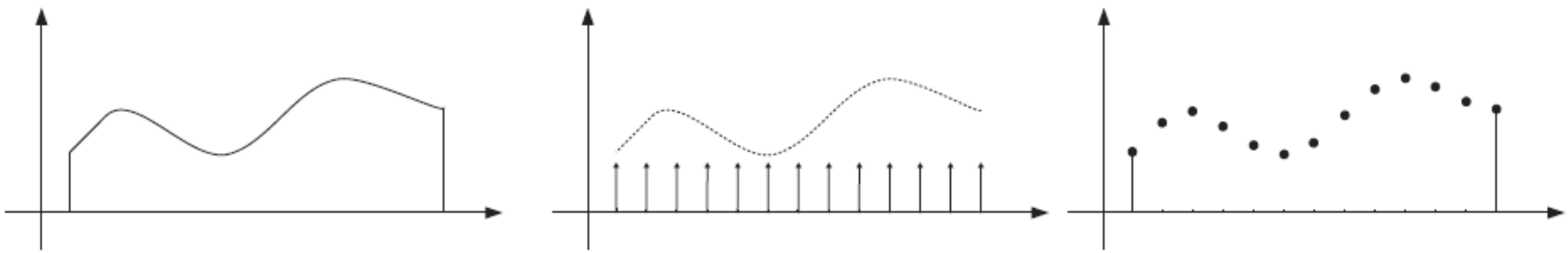
Representação de Sinais

- Esquema Computacional



Discretização

- Construindo a Representação



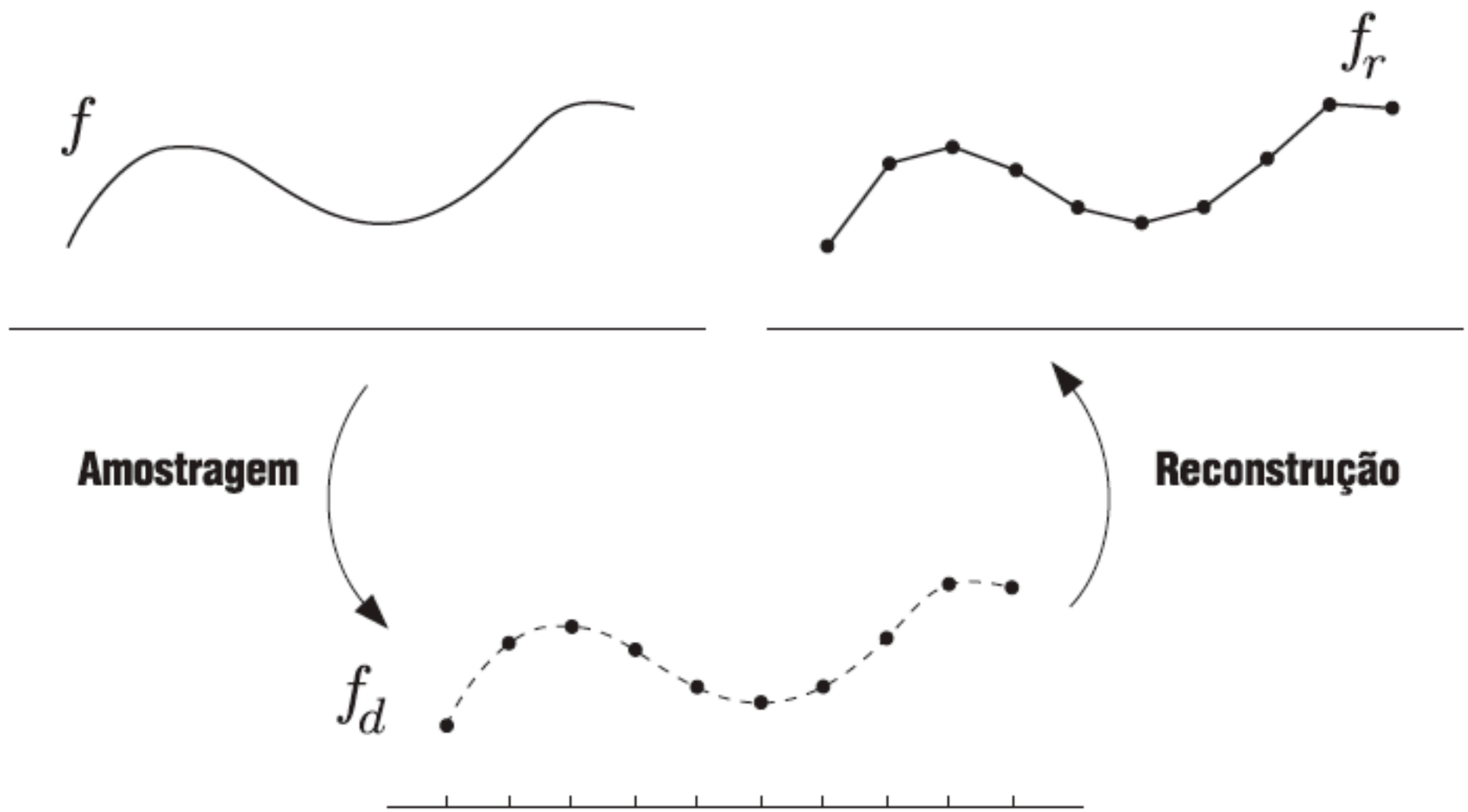
Sinal | Trem de Impulsos | Amostras

- Sequencia de Amostras

$$(\ldots, f(u_{-2}), f(u_{-1}), f(u_0), f(u_1), f(u_2), \ldots)$$

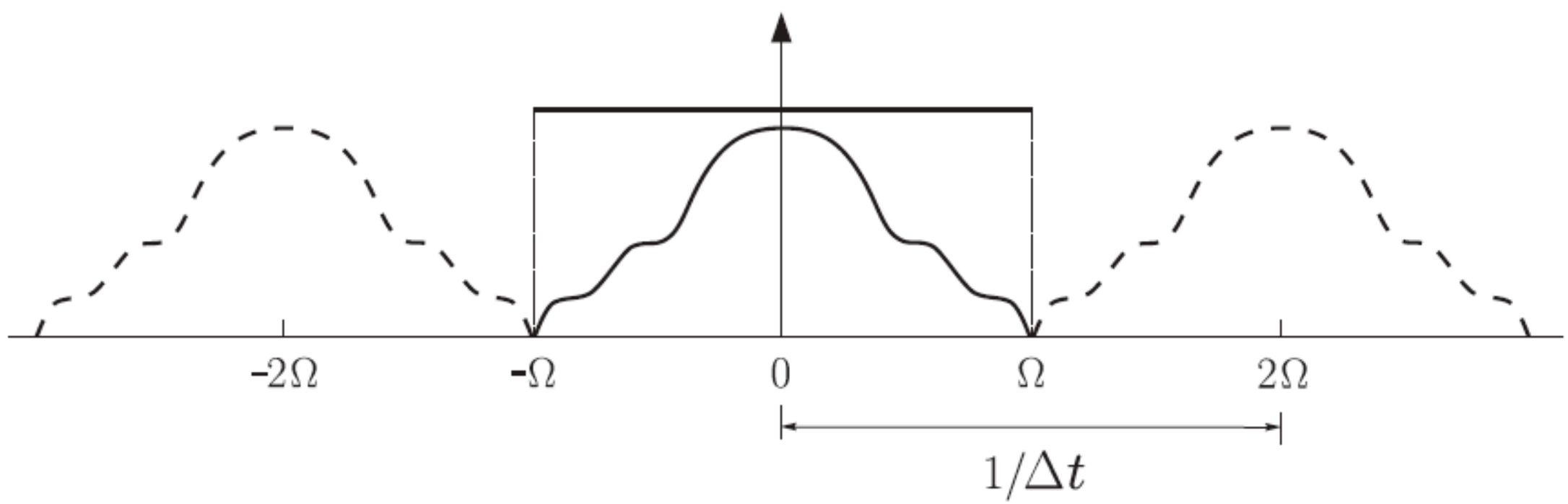
Reconstrução

- Reconstruindo o Sinal



Teorema de Amostragem

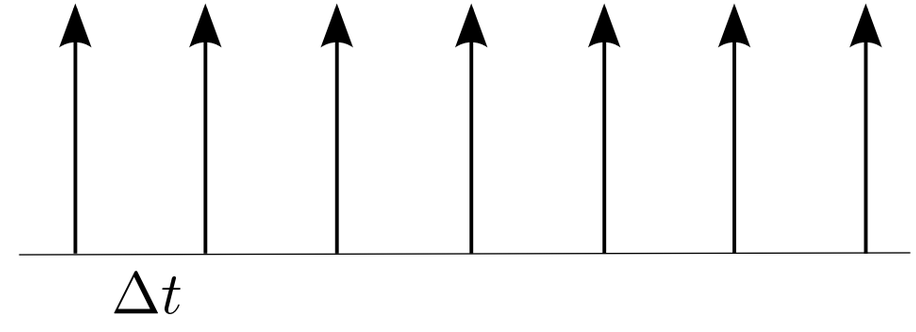
Theorem 2.3. *(Teorema da amostragem de Shannon-Whittaker.) Sejam f um sinal de banda limitada, e Ω o menor valor de freqüência tal que $supp(\hat{f}) \subset [-\Omega, \Omega]$. O sinal f pode ser reconstruído de forma exata a partir de um conjunto uniforme de amostras $\{m\Delta t\,;\, m \in \mathbb{Z}\}$ se $\Delta t < 1/(2\Omega)$.*



Amostragem Uniforme

- Trem de Impulsos

$$L_\Delta = \{i\Delta t \mid i \in \mathbb{Z}\}$$



periodo de amostragem

- Amostragem do Sinal

$$f_\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t)\ \delta(t - n\Delta t)$$

- Sequencia de Amostras

$$f_\Delta = \{\ldots, f(\Delta t), f(2\Delta t), \ldots\}$$

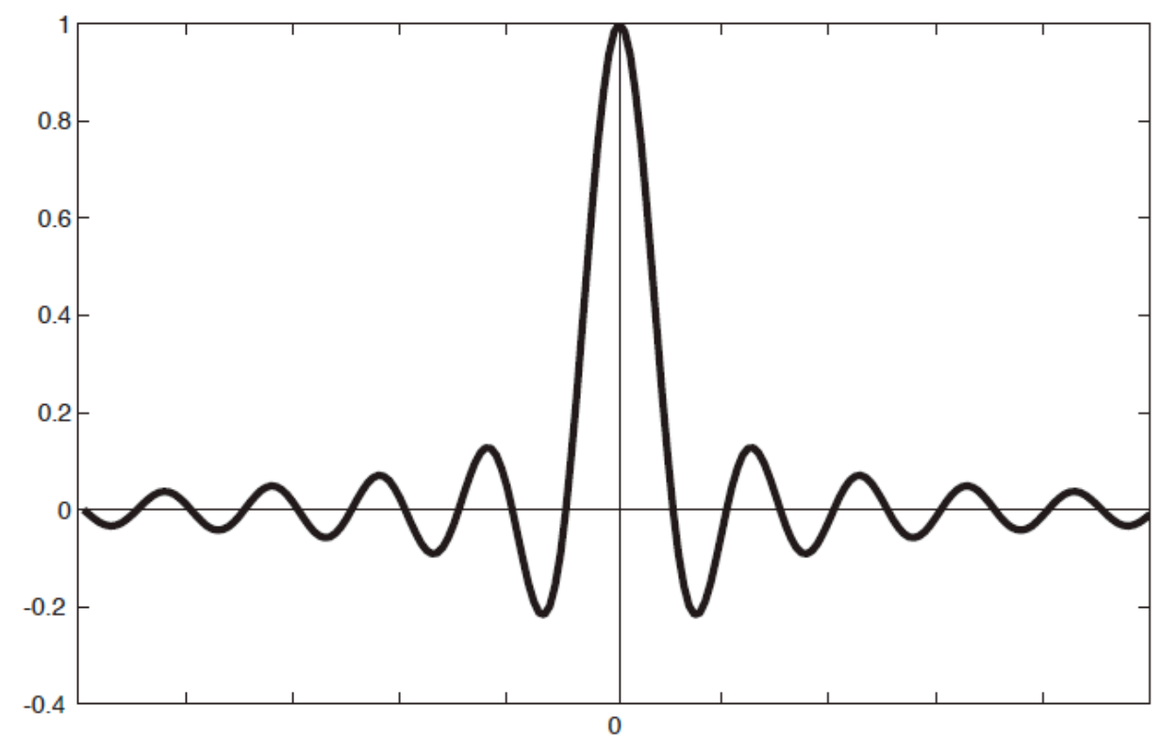
Reconstrução Ideal

- Interpolação de Shannon

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\Omega\Delta t \; f(k\Delta t) \, \mathrm{sinc}(2\pi\Omega(t - k\Delta t))$$

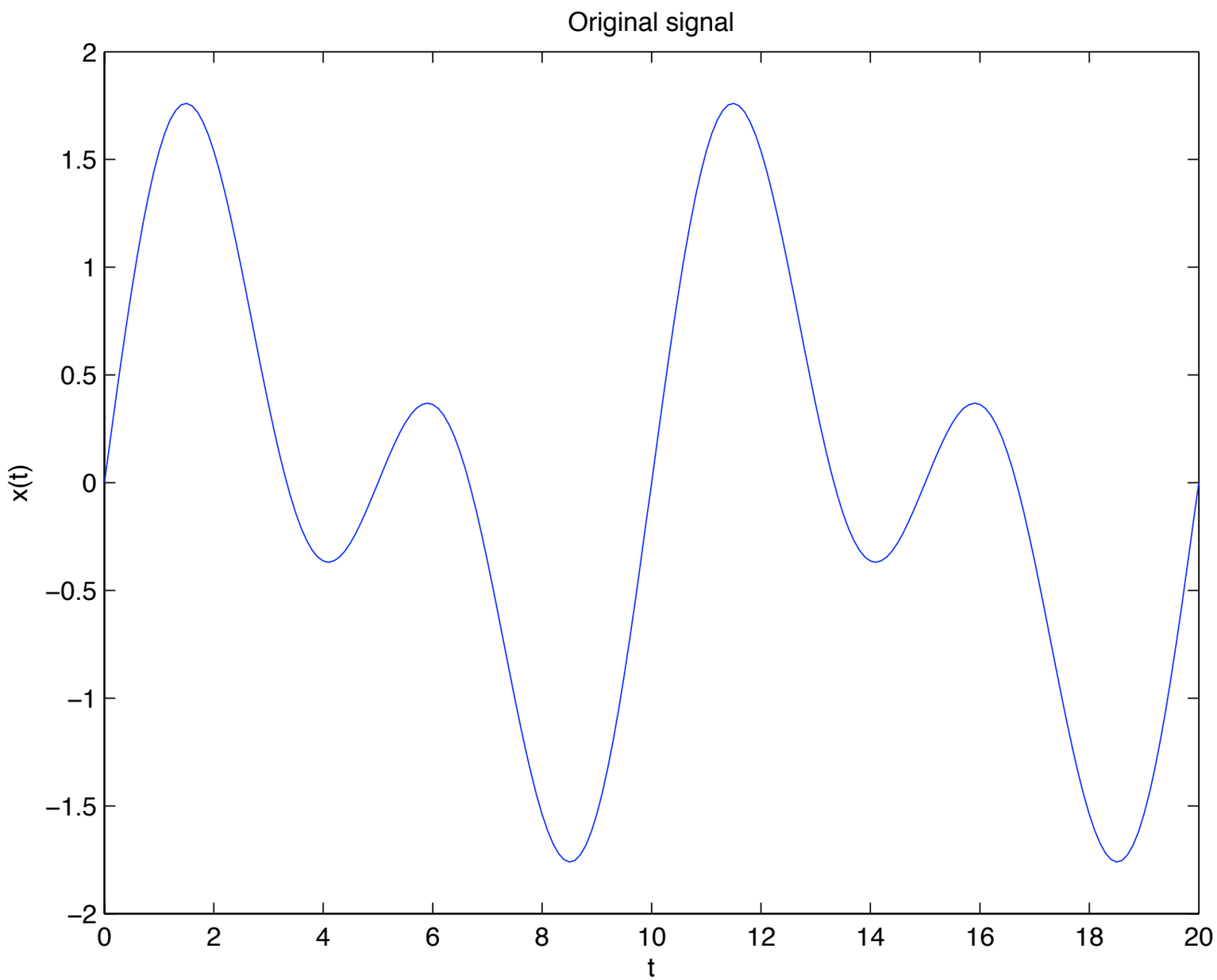
- Base
  - sinc Function

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$



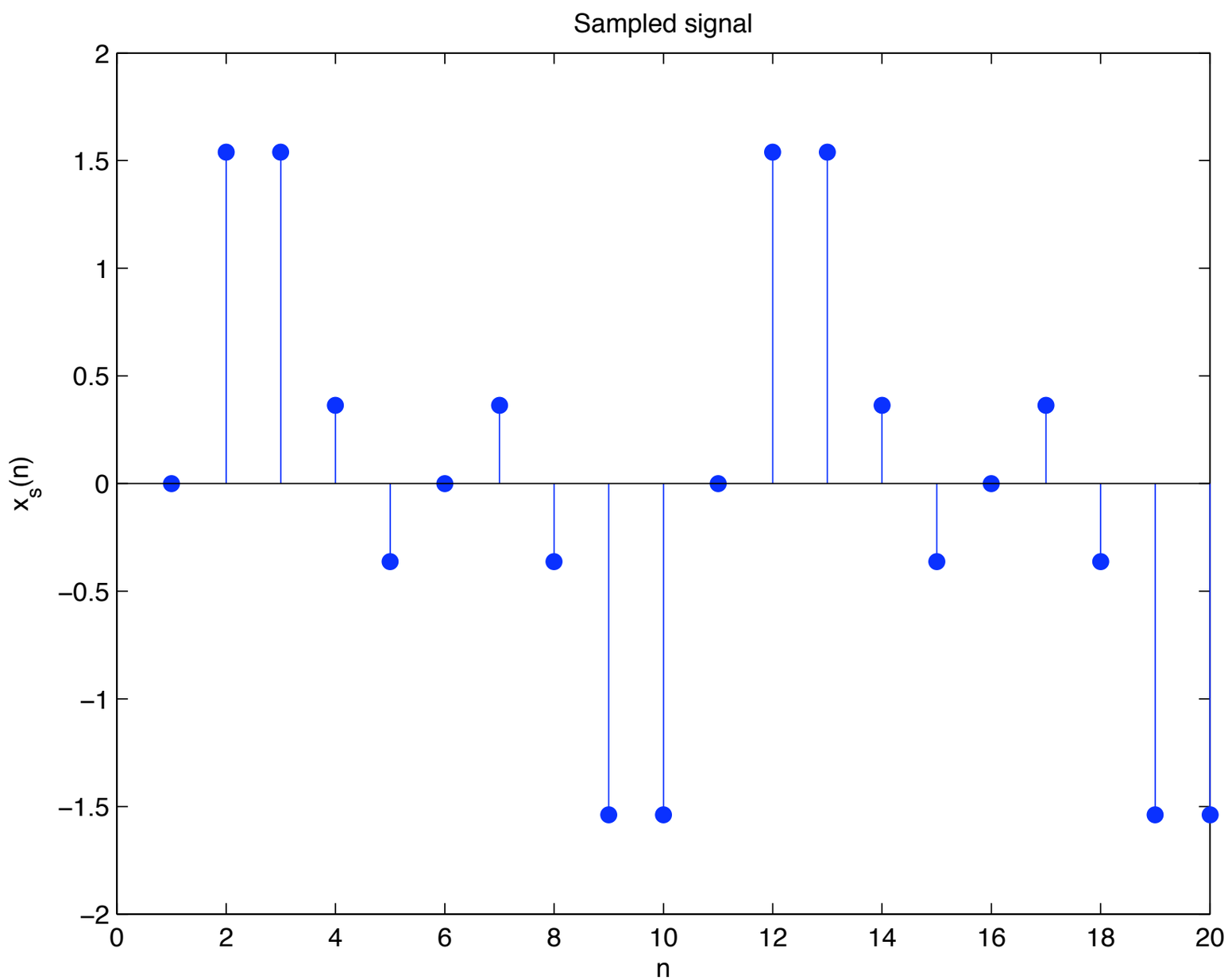
Exemplo

- Sinal Continuo: f(t)



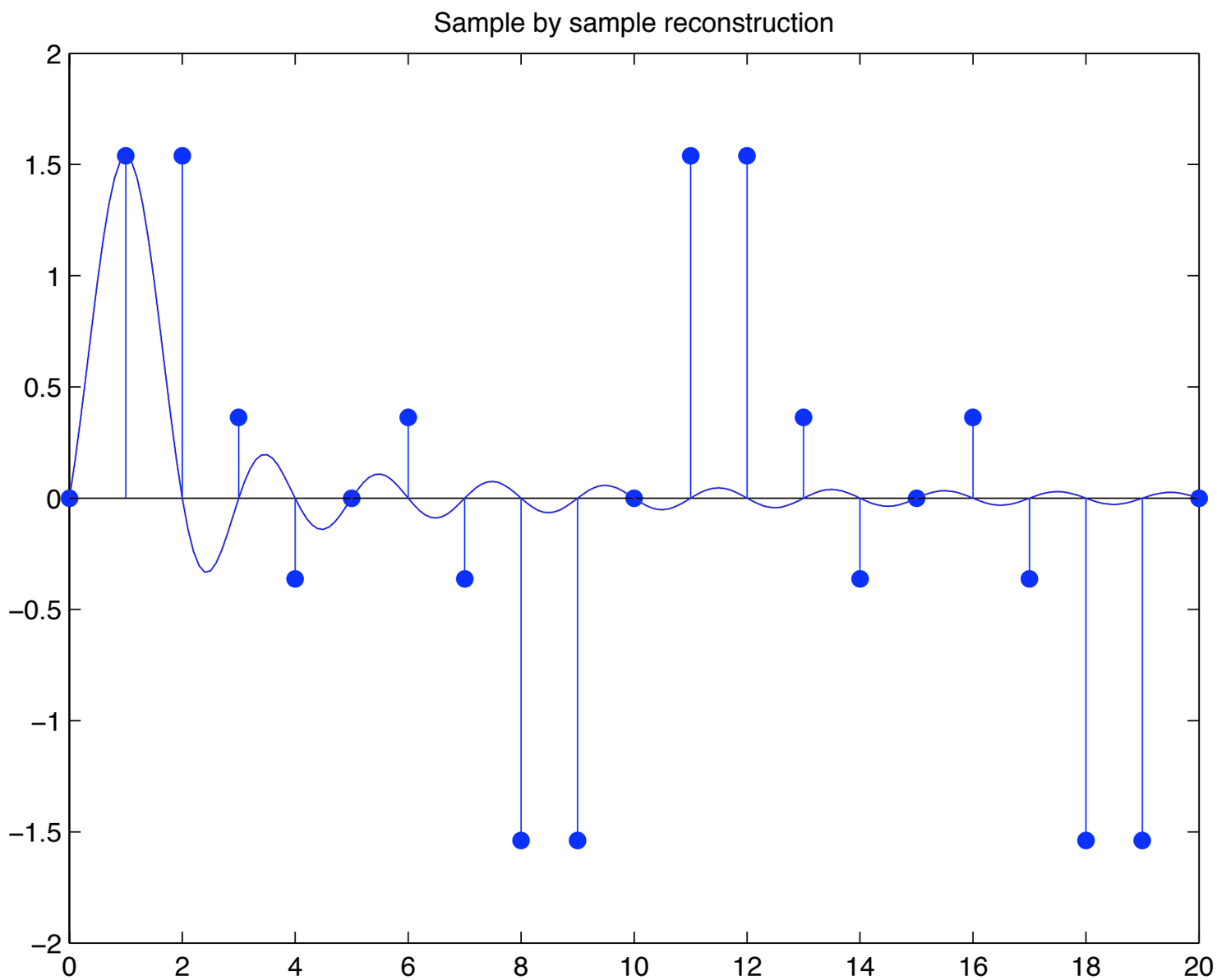
Exemplo

- Amostragem Uniforme: $\{f(t_i)\}$



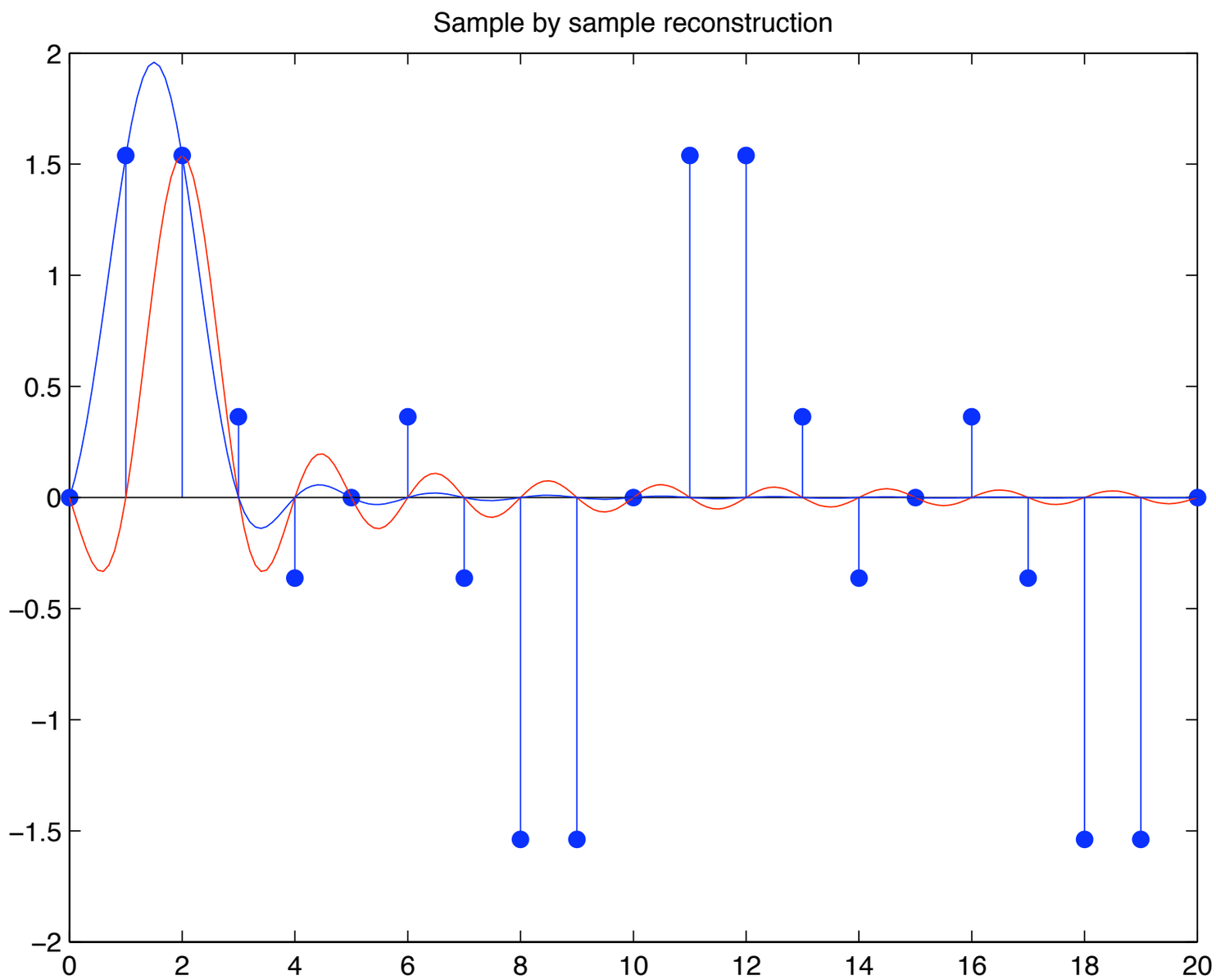
Exemplo

- Reconstrução: passo 1



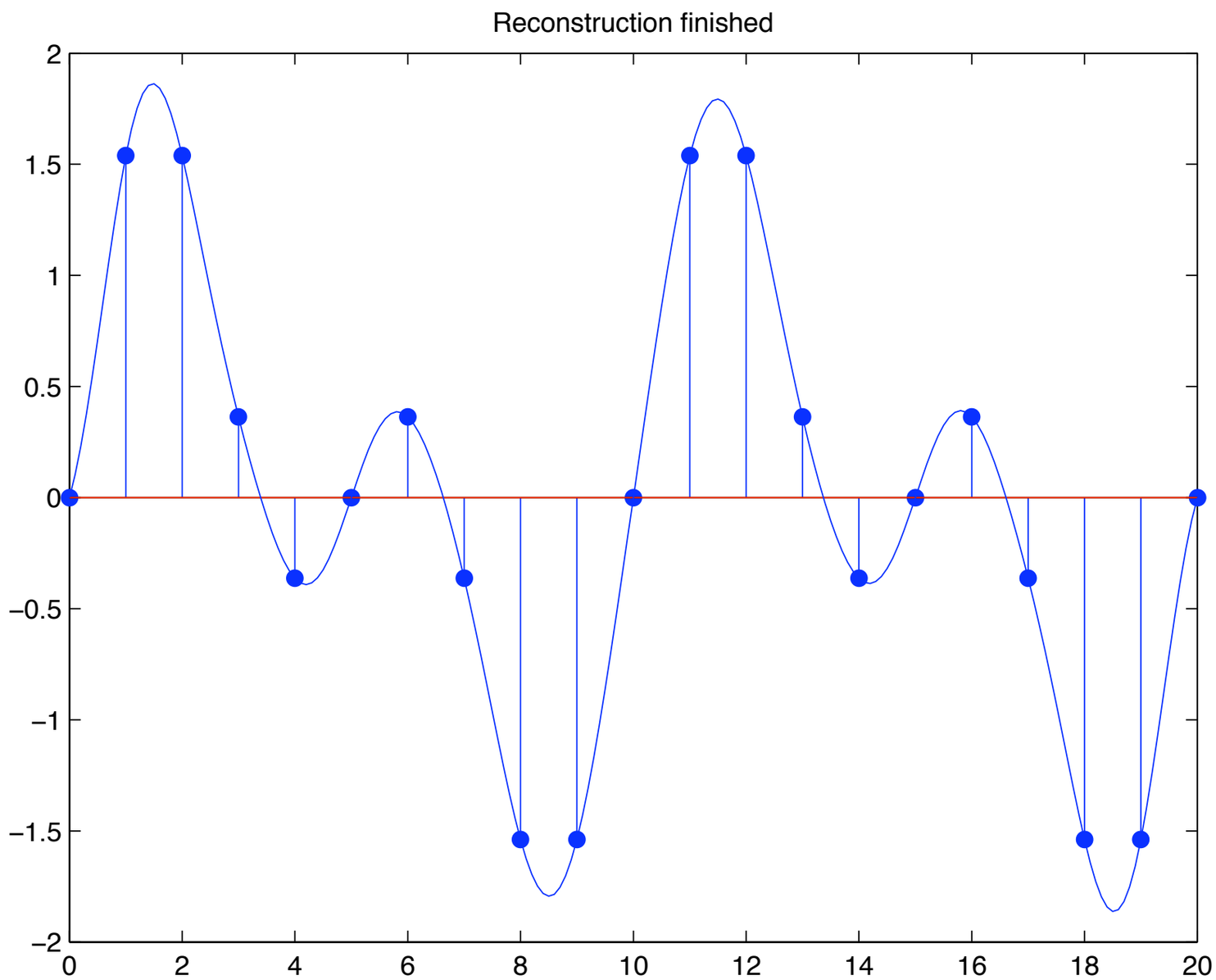
Exemplo

- Reconstrução: passo 2



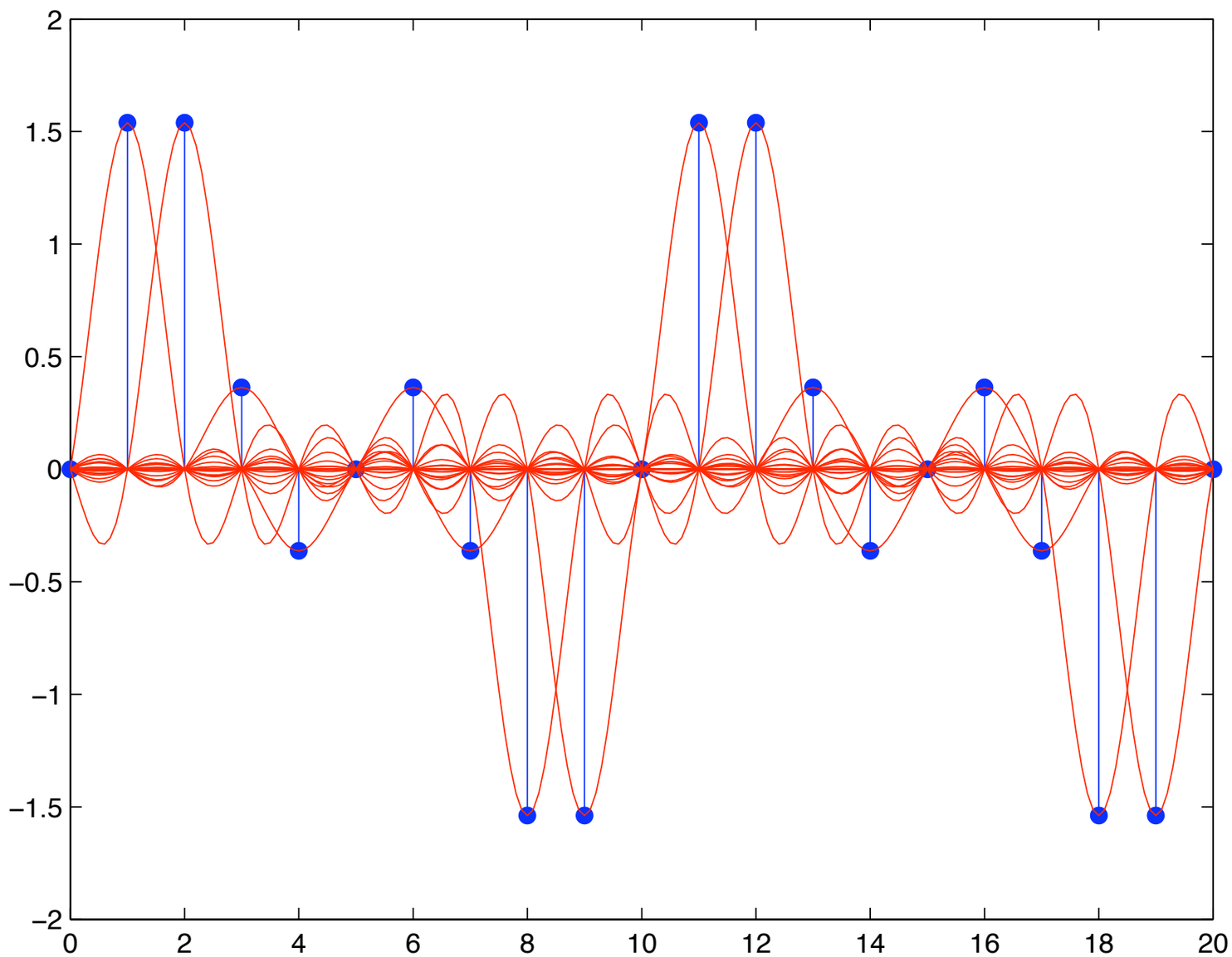
Exemplo

- Reconstrução completa



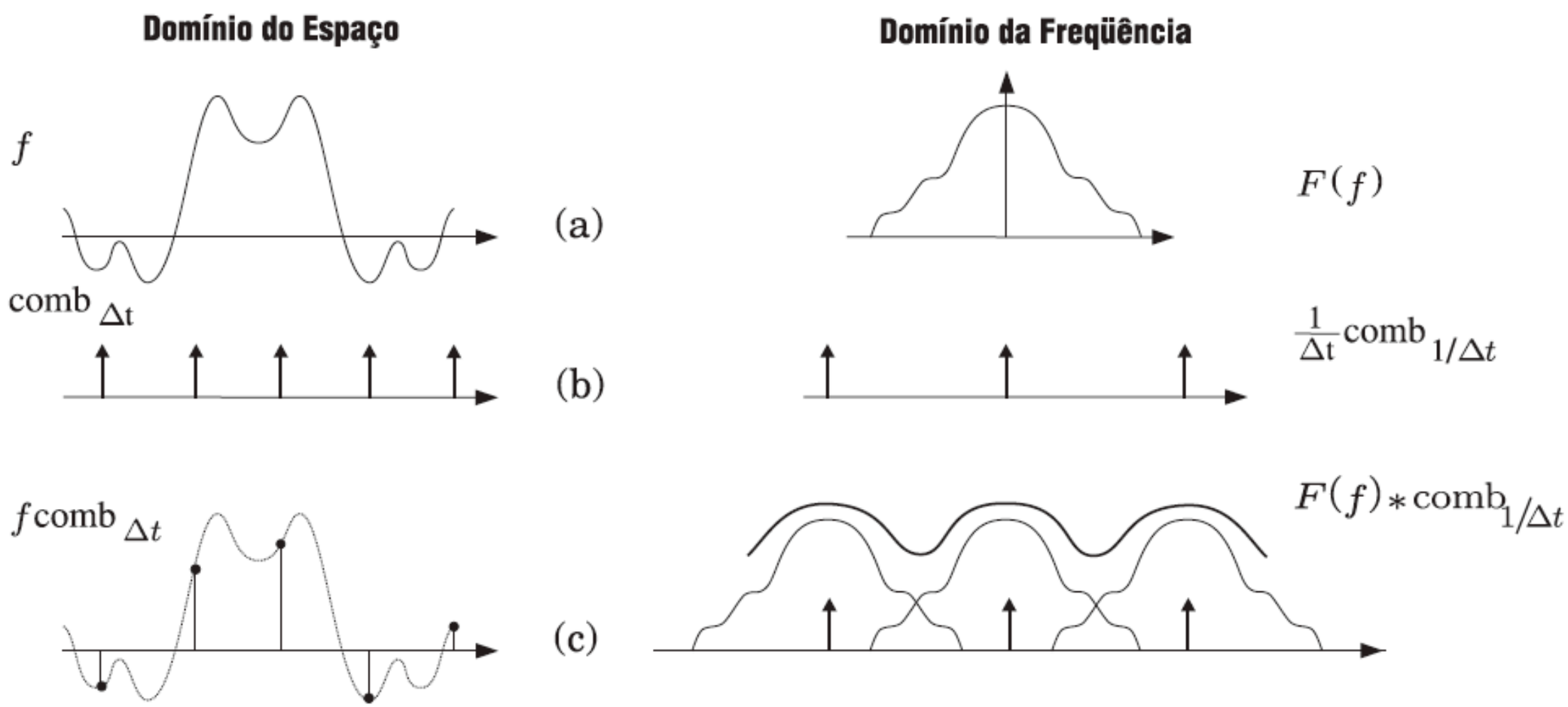
Exemplo

- Base de Interpolação de Shannon



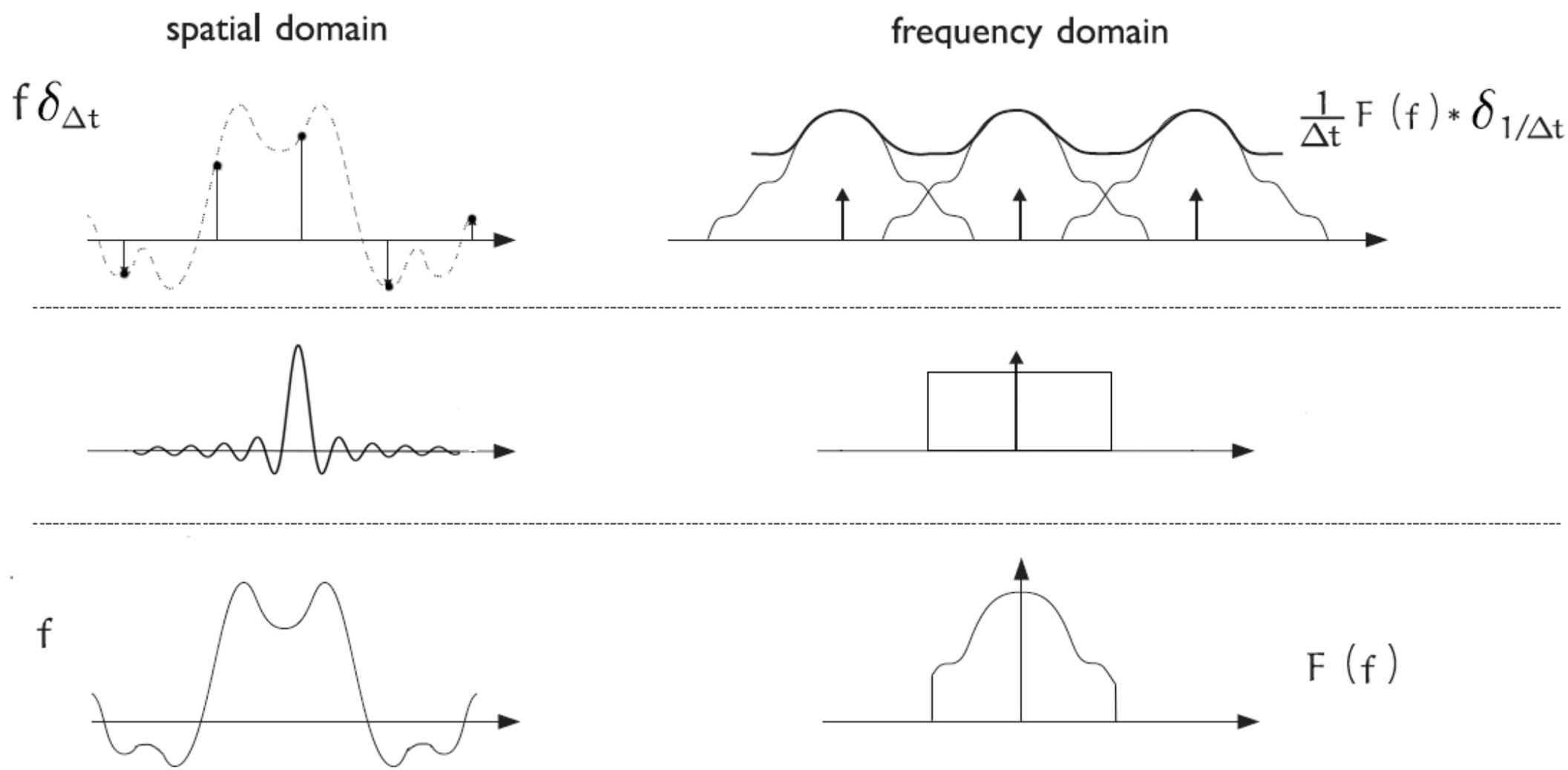
Intuição do Teorema I

- Discretização



Intuição do Teorema II

- Reconstrução



Operações com Sinais

$$T : \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}'$$

- Filtragem
  - Operação Unária

$$L : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

- Mixagem
  - Operação Binaria

$$C : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

Filtragem

- Usos da Filtragem
  - Eliminação de Ruidos
  - Modificação no Som
    - Enfase / Atenuação de Frequências

Tipos de Filtro

- Filtros Lineares

$$L(f+g) = L(f) + L(g) \quad \text{e} \quad L(\lambda f) = \lambda L(f)$$

- Filtros Espacialmente Invariantes

$$(Lf)(x-a) = L[f(x-a)]$$

Filtros Clássicos

Theorem 2.2. *Um filtro linear e espacialmente invariante L fica determinado por sua função resposta de impulso h. Mais precisamente, para todo sinal f tem-se $L(f) = f * h$.*

- Resposta de Impulso do Filtro

$$h(t) = L(\delta)$$

- Filtragem

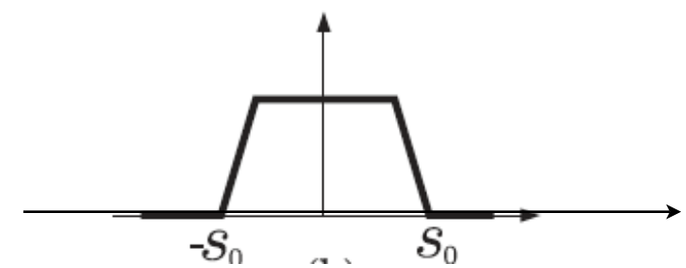
$$Lf(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)L[\delta(x-t)]dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(x-t)dt$$

Filtragem e Frequência

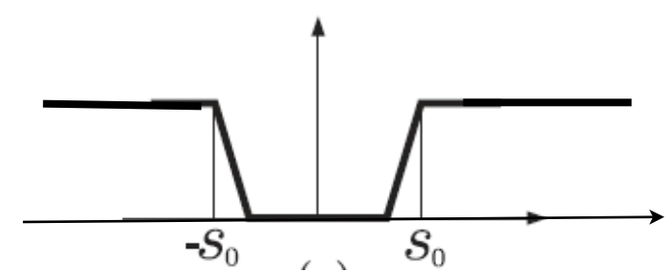
- Função de Transferência do Filtro

$$F(h) = \hat{h}$$

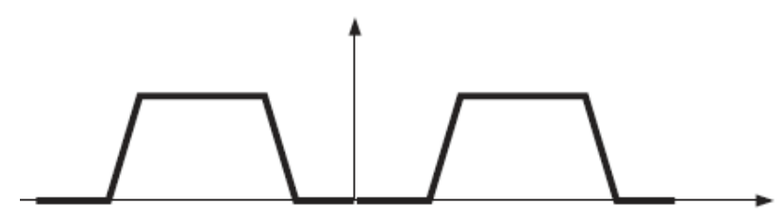
- Efeito do Filtro
  - Passa Baixas



  - Passa Altas



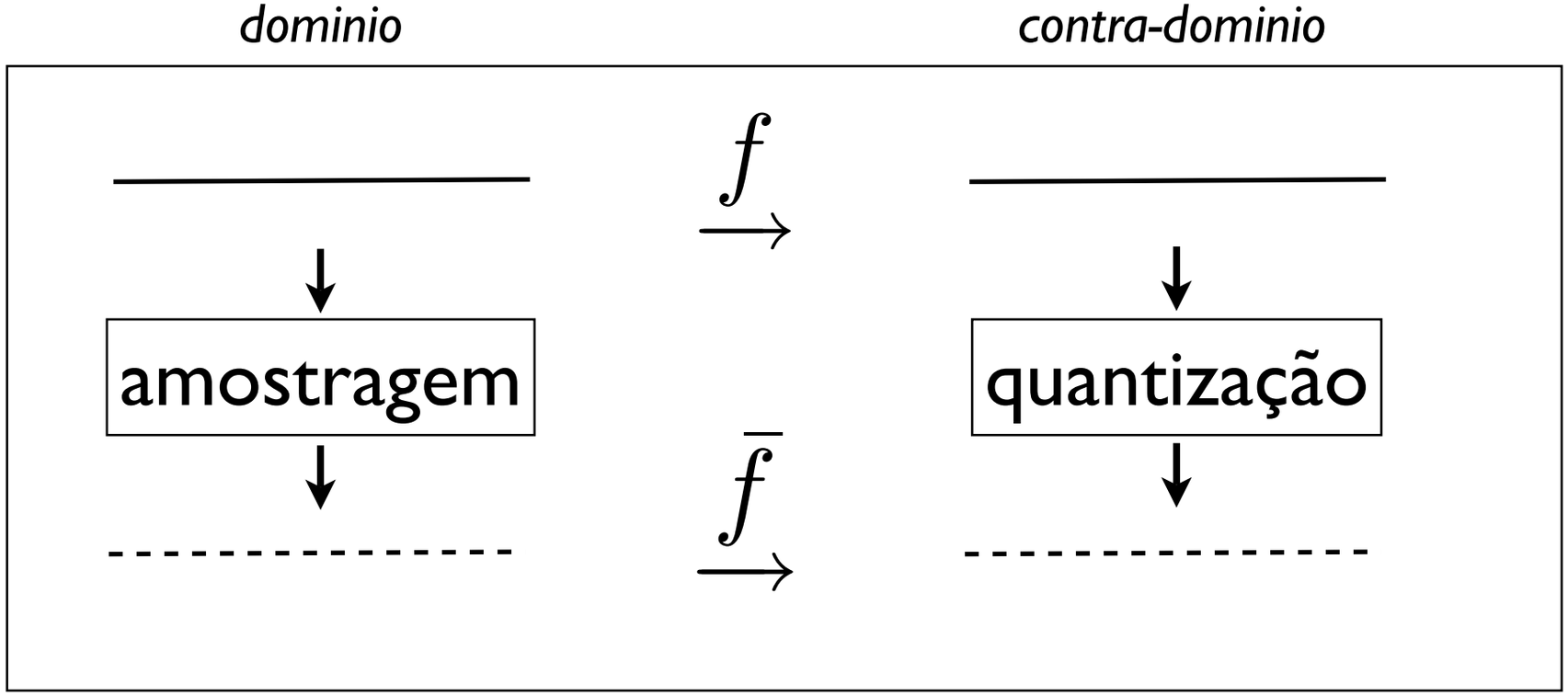
  - Passa Banda



Representação 2

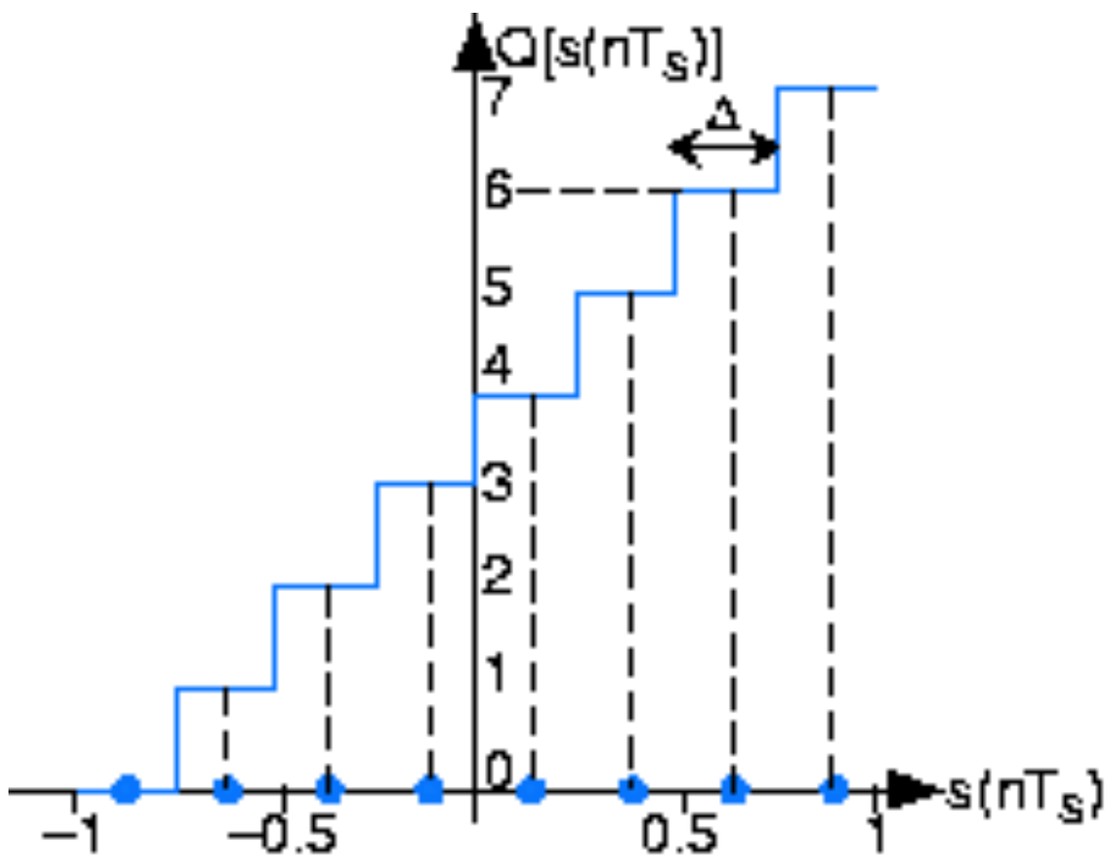
- Modelo Funcional

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



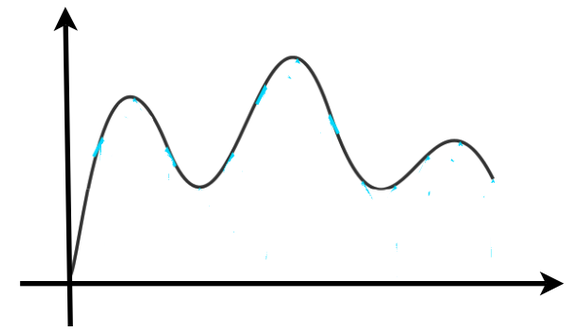
Quantização

- Níveis de Quantização
  - Número de Bits

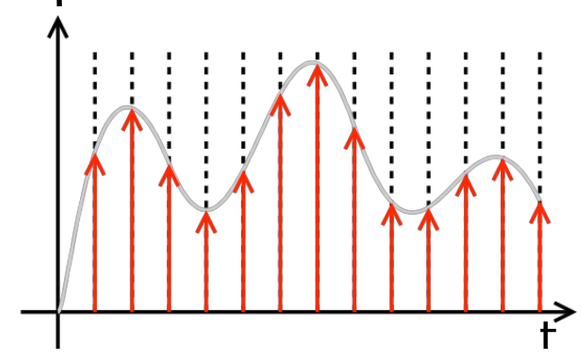


Tipos de Sinal

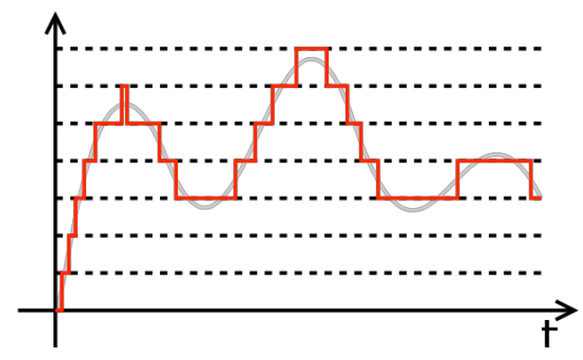
- Continuo-Continuo



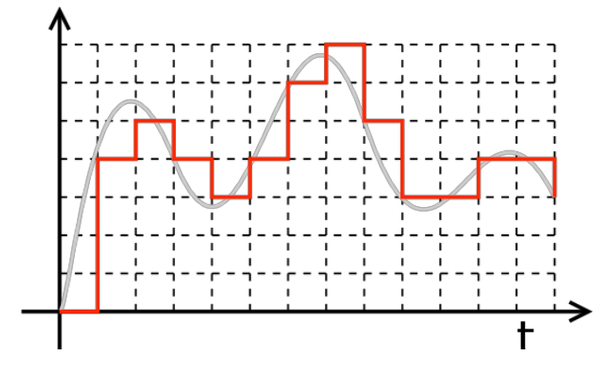
- Discreto-Continuo



- Continuo-Discreto

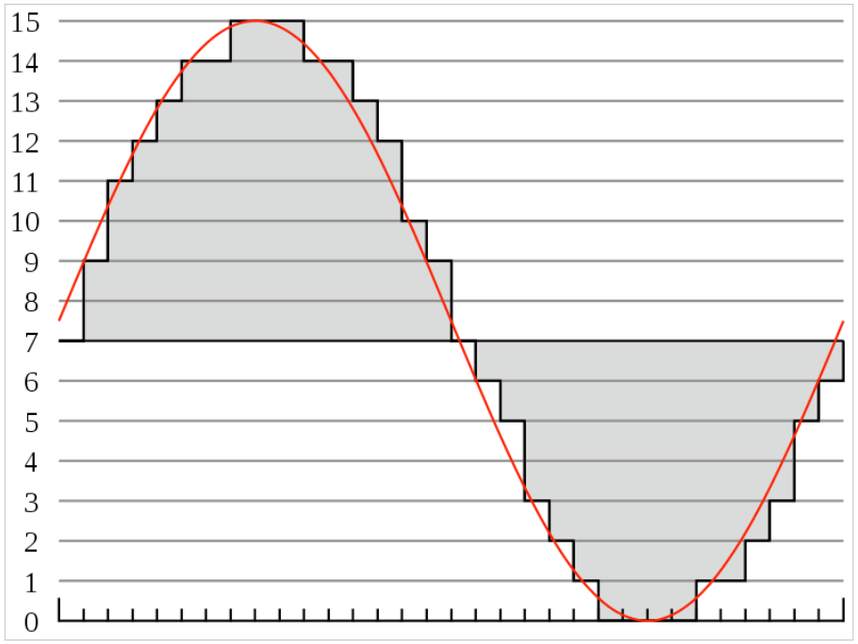


- Discreto-Discreto



Codificação

- LPCM (Linear Pulse Code Modulation)
  - Formato Digital (sem compressão)



- Exemplos
  - .wav: Waveform audio format (Audio for Windows)
  - .aiff: Audio Interchange File Format (Apple)

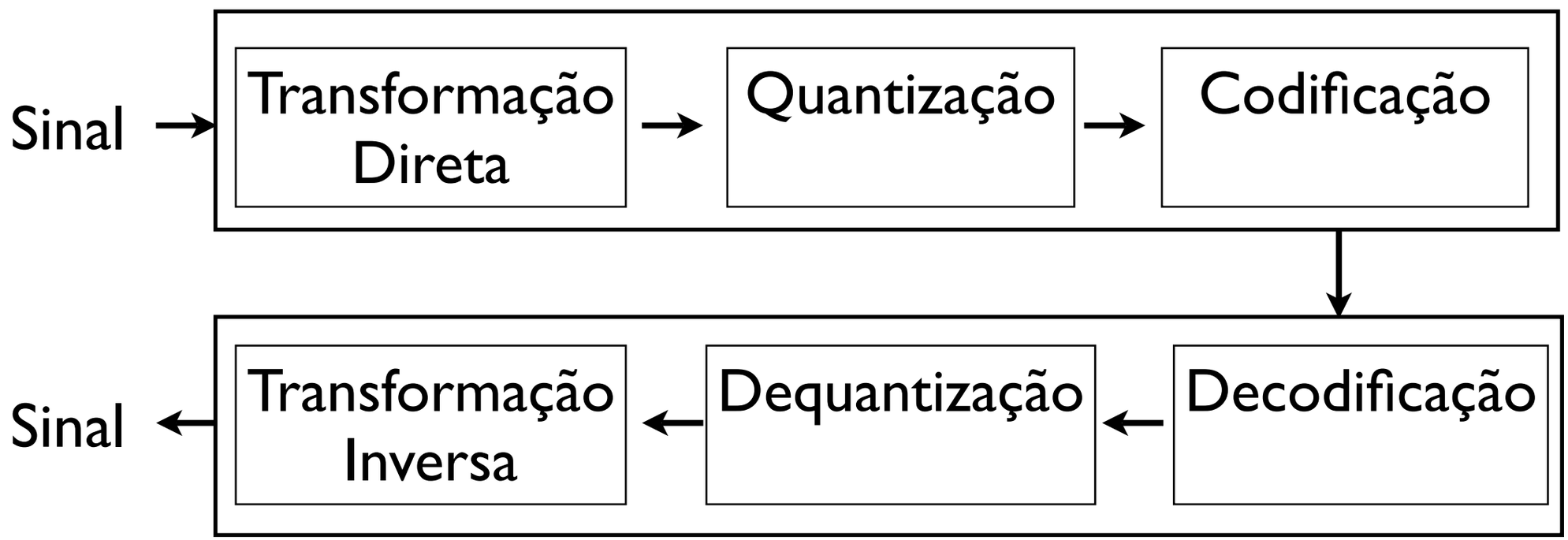
WAV Codecs

- Taxa de Amostragem / Niveis de Quantização

Format	Bitrate	1 Minute =
11,025 Hz 16 bit PCM	176.4 kbit/s[4]	1292 KiB[5]
8,000 Hz 16 bit PCM	128 kbit/s	938 KiB
11,025 Hz 8 bit PCM	88.2 kbit/s	646 KiB
11,025 Hz μ-Law	88.2 kbit/s	646 KiB
8,000 Hz 8 bit PCM	64 kbit/s	469 KiB
8,000 Hz μ-Law	64 kbit/s	469 KiB
11,025 Hz 4 bit ADPCM	44.1 kbit/s	323 KiB
8,000 Hz 4 bit ADPCM	32 kbit/s	234 KiB

Compressão

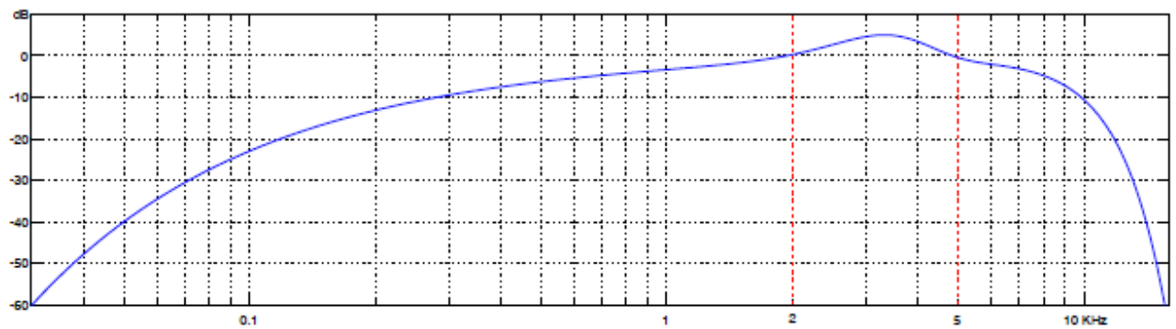
- Anatomia - CODEC



- *Mesma Informação - Menos Dados*

Psico-Acústica

- Frequências Audiveis



Função de Transferencia Auditiva: 2 - 5 Khz

- Mascaramento Auditivo
  - Frequência (notas semelhantes / mais baixas)
  - Temporal (notas superpostas)

MP3

- MPEG-1 Audio Layer 3
  - Moving Picture Experts Group (Fraunhofer IIS)

▸ CODEC

1. Time Frequency Mapping (TFM)
2. Fast Fourier Transformation (FFT)
3. Quantisation and Encoding
4. Packers

★ *Taxa de Compressão ~ 1:10*

Estrutura Musical

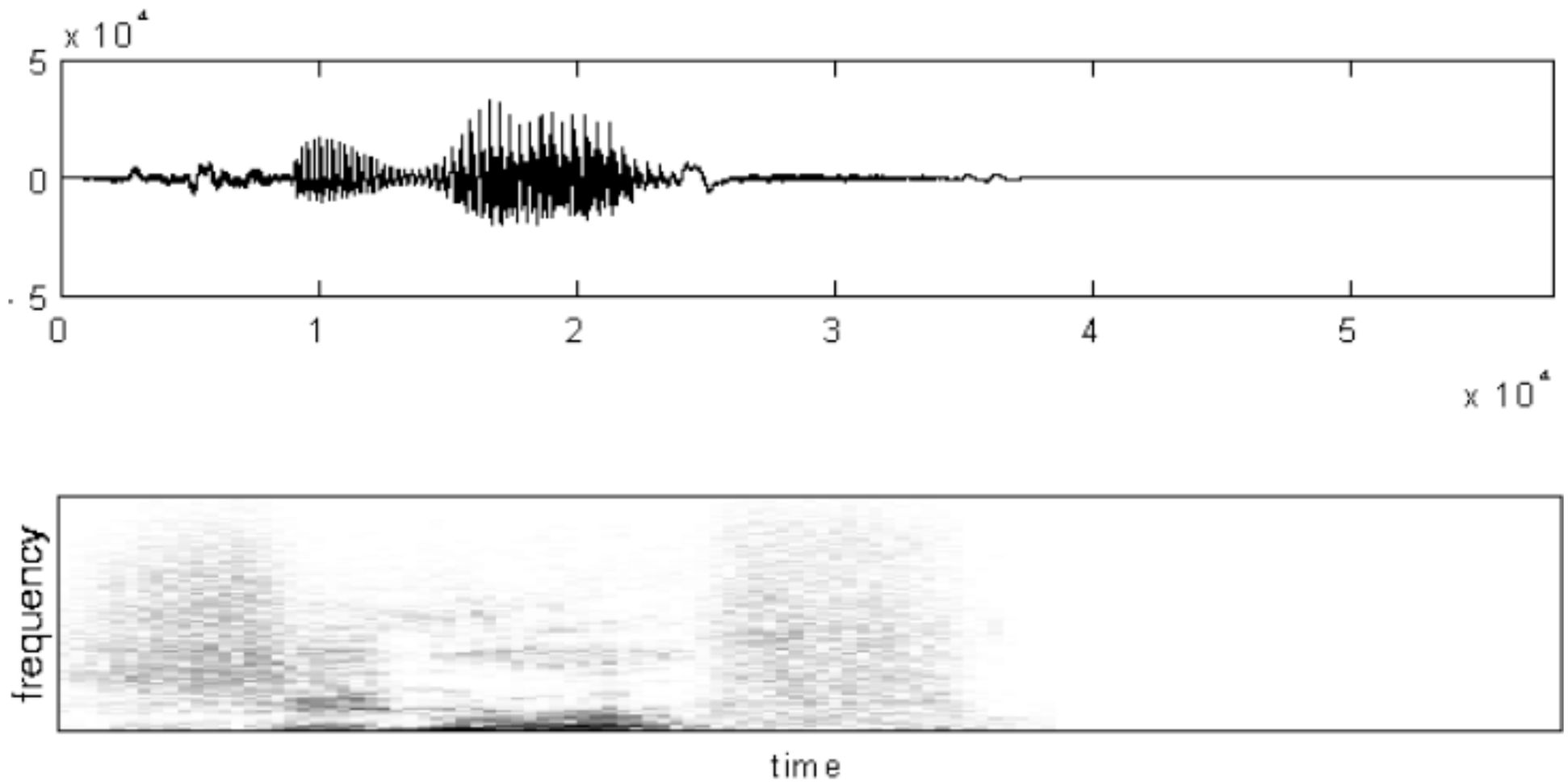
Notas (*Duração Finita*)

- Localização no Tempo e Frequencia
  - Transformada de Fourier com Janela
  - Transformada de Wavelets

- *Principio da Incerteza*

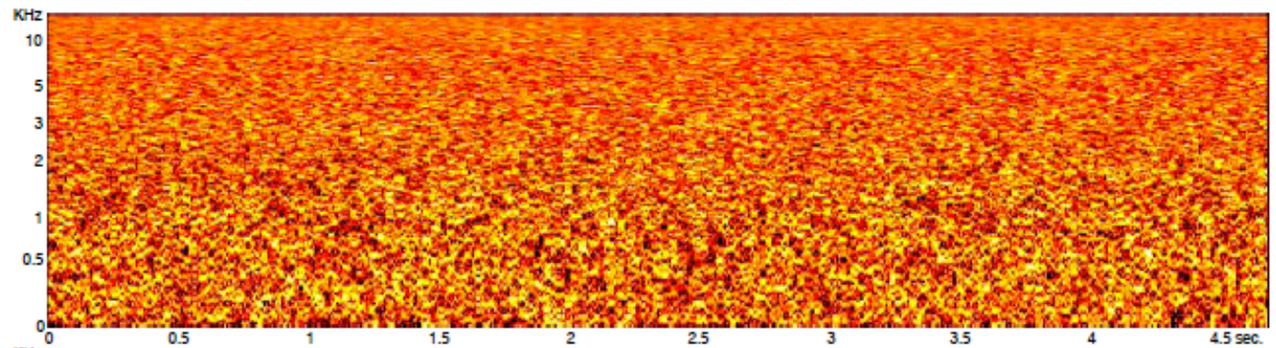
Spectrograma

- Transformada de Fourier com Janela

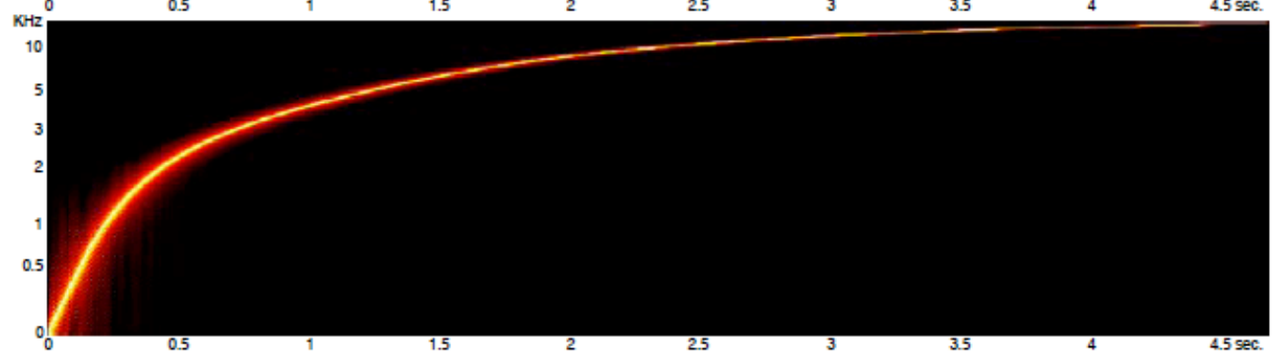


Estrutura Revelada

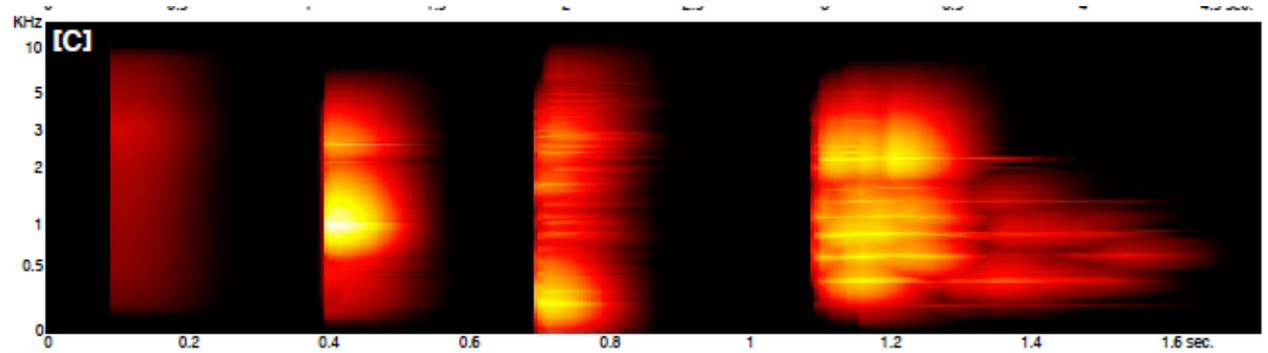
Ruido Branco



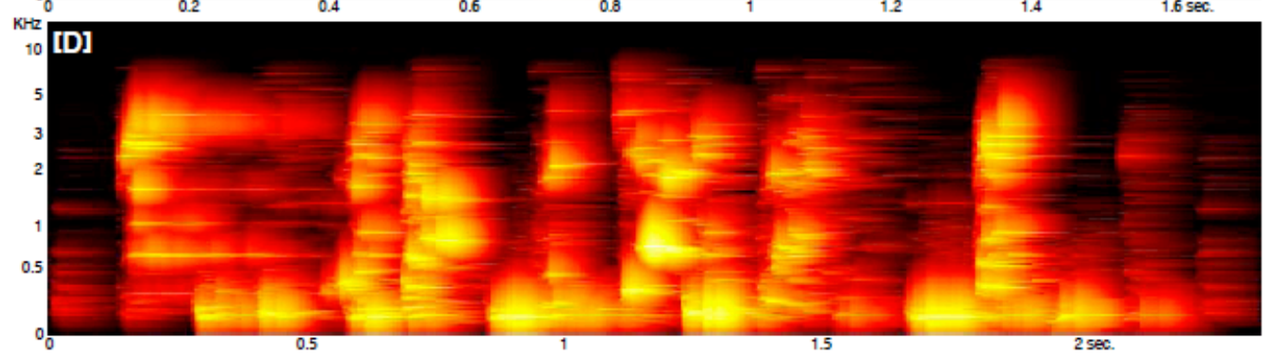
Rampa Linear
20 - 20K Hz



Click /
Tambor /
Violino



Sex Machine
(James Brown)



Perguntas ?